## CADERNO 3 – SEMIEXTENSIVO D

## FRENTE 1 – ÁLGEBRA

### Módulo 9 – Números Complexos – Forma Algébrica

1) $(5 + 7i) \cdot (3 - 2i) = 15 - 10i + 21i - 14i^2 = 15 + 11i + 14 = 29 + 11i$
Resposta: C

2) $f(z) = z^2 - z + 1 \Rightarrow f(1 - i) = (1 - i)^2 - (1 - i) + 1 =$
$= 1 - 2i + i^2 - 1 + i + 1 = - i$
Resposta: E

3) $2x + (y - 3)i = 3y - 4 + xi$, (x e y são reais) $\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y - 4 \\ y - 3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ 2 \cdot (y - 3) = 3y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y = 10$$
Resposta: C

4) I) $z_1 = a + 8ai$ e $z_2 = -4 + bi$, $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1 + z_2 = (a - 4) + (8a + b)i$
II) $(z_1 + z_2)$ deve ser imaginário puro, então $a - 4 = 0$ e $\forall b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = 4$ e $\forall b \in \mathbb{R}$
Resposta: $a = 4$ e $\forall b \in \mathbb{R}$

5) I) $(a + i) \cdot (3 + 2i) = 3a + 2ai + 3i + 2i^2 = (3a - 2) + (2a + 3)i$
II) $(a + i) \cdot (3 + 2i)$ deve ser um número real, então
$2a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$
Resposta: D

6) $(a + i)^4 = (a + i)^2 \cdot (a + i)^2 = (a^2 + 2ai + i^2) \cdot (a^2 + 2ai + i^2) =$
$= [(a^2 - 1) + 2ai] \cdot [(a^2 - 1) + 2ai] = [(a^2 - 1) + 2ai]^2 =$
$= (a^2 - 1)^2 + 2 \cdot (a^2 - 1) \cdot 2ai + 4a^2i^2 = (a^2 - 1)^2 - 4a^2 + 4a(a^2 - 1)i$
Para que $(a + i)^4$ seja um número real, devemos ter:
$4a \cdot (a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4a = 0$ ou $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = \pm 1$
Assim, a pode assumir 3 valores reais, a saber: 0, 1 e – 1
Resposta: C

7) $$\frac{2 - i}{2 + i} = \frac{(2 - i) \cdot (2 - i)}{(2 + i) \cdot (2 - i)} = \frac{4 - 2i - 2i + i^2}{2^2 - i^2} = \frac{4 - 4i - 1}{4 - (-1)} =$$
$$= \frac{3 - 4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$
Resposta: E

8) $$\frac{5 + i}{7 - 2i} = \frac{(5 + i) \cdot (7 + 2i)}{(7 - 2i) \cdot (7 + 2i)} = \frac{35 + 10i + 7i + 2i^2}{7^2 - (2i)^2} =$$
$$= \frac{35 + 17i - 2}{49 - 4i^2} = \frac{33 + 17i}{49 + 4} = \frac{33 + 17i}{53} = \frac{33}{53} + \frac{17}{53}i$$
Resposta: A

9) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x + yi}{2 + i} = \frac{(x + yi) \cdot (2 - i)}{(2 + i) \cdot (2 - i)} = \frac{2x + 2yi - xi - yi^2}{2^2 - i^2} =$$
$$= \frac{(2x + y) + (2y - x)i}{4 + 1} = \frac{(2x + y)}{5} + \frac{(2y - x)}{5}i \in \mathbb{R}, \text{ então:}$$
$$\frac{2y - x}{5} = 0 \Leftrightarrow 2y - x = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$$
Resposta: A

10) $$\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \frac{(1 + i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 + 1} = \frac{2i}{2} = i$$
Logo, $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^4 = i^4 = 1$
Resposta: E

11) I) $(1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = (1 + 2i + i^2)^5 = (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i$
II) $$\frac{1}{(1 + i)^{10}} = \frac{1}{32 \cdot i} = \frac{1}{32 \cdot i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{32i^2} = -\frac{i}{32}$$
Resposta: A

12) $$\frac{i^{246} + i^{121}}{i^{34}} = \frac{i^2 + i^1}{i^2} = \frac{-1 + i}{-1} = 1 - i$$
Resposta: D

13) I) $n = \dbinom{9}{4} = \dfrac{9!}{4! \cdot (9 - 4)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 126$
II) $k = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4}_{=0} + \underbrace{i^5 + i^6 + i^7 + i^8}_{=0} + \ldots + i^{125} + i^{126} = i^{125} + i^{126} =$
$= i^1 + i^2 = i - 1 = -1 + i$
Resposta: C

14) $(1 + i)^5 = (1 + i)^2 \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) =$
$= (1 + 2i + i^2) \cdot (1 + 2i + i^2) \cdot (1 + i) = (2i) \cdot (2i) \cdot (1 + i) =$
$= 4i^2 \cdot (1 + i) = -4 \cdot (1 + i)$
Resposta: C

15) $(1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = [1^2 + 2i + i^2]^5 = (2i)^5 = 32i$
Resposta: A

16) $(1 - i)^{16} = [(1 - i)^2]^8 = [1^2 - 2i + i^2]^8 = (-2i)^8 = 256i^8 = 256$
Resposta: E

### Módulo 10 – Números Complexos – Forma Algébrica e Forma Trigonométrica

1) Sejam $u = a + bi \Rightarrow \bar{u} = a - bi$ e $v = c + di \Rightarrow \bar{v} = c - di$
I) $\bar{u} + \bar{v} = 1 - i \Leftrightarrow (a - bi) + (c - di) = 1 - i \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (a + c) - (b + d)i = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

II) $u^2 - v^2 = 6 \Leftrightarrow (u - v) \cdot (u + v) = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a + bi) - (c + di)] \cdot [(a + bi) + (c + di)] = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a - c) + (b - d)i] \cdot [(a + c) + (b + d)i] = 6$

III) Substituindo (I) em (II), temos:

$[(a - c) + (b - d)i] \cdot [1 + i] = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a - c) + (a - c)i + (b - d)i + (b - d)i^2 = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a - c) - (b - d)] + [(a - c) + (b - d)]i = 6 + 0i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - c) - (b - d) = 6 \\ (a - c) + (b - d) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 3 \\ b - d = -3 \end{cases}$$

IV) $$\begin{cases} a + c = 1 \\ a - c = 3 \\ b + d = 1 \\ b - d = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 - i \\ v = -1 + 2i \end{cases} \Rightarrow u - v = 3 - 3i$$

Resposta: D

2) Para $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, temos:

$z + 2\bar{z} + 3z + 4\bar{z} = 320 + 28i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z + 6\bar{z} = 320 + 28i \Leftrightarrow 4 \cdot (a + bi) + 6 \cdot (a - bi) = 320 + 28i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a + 4bi + 6a - 6bi = 320 + 28i \Leftrightarrow 10a - 2bi = 320 + 28i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 320 \\ -2b = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 32 \\ b = -14 \end{cases} \Rightarrow z = 32 - 14i$$

Resposta: C

3) Para $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, temos:

$\bar{z} = z^2 \Leftrightarrow (a - bi) = (a + bi)^2 \Leftrightarrow a - bi = a^2 + 2abi + b^2i^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - bi = (a^2 - b^2) + 2abi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ b(2a + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} - b^2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resposta: E

4) Para $z = x + yi$ e $\bar{z} = x - yi$, temos:

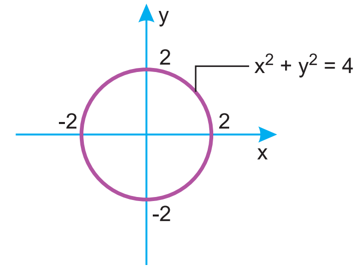
$z \cdot \bar{z} - 4 = 0 \Rightarrow (x + yi) \cdot (x - yi) = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$, que representa uma circunferência de centro na origem e raio 2.

Resposta: B

5) a) (I) $z \cdot \bar{z} = 4$

$(x + iy) \cdot (x - iy) = 4 \Leftrightarrow x^2 - i^2y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Os pontos (x, y), da última equação, descrevem uma circunferência de centro na origem e raio 2.




Pode-se, também, observar que:

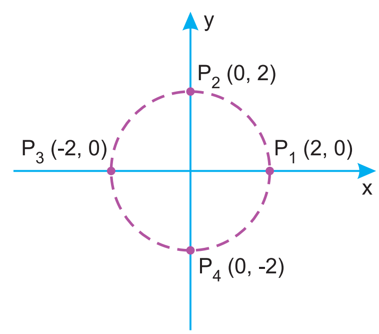
$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow |z| = 2$

(II) $(\bar{z})^2 = z^2$

$(x - iy)^2 = (x + iy)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xyi + i^2y^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0$ ou $Im(z) = 0$

b) Fazendo (I) $\cap$ (II), temos:




Assim, as intersecções são os pontos $P_1(2; 0)$; $P_2(0; 2)$; $P_3(-2, 0)$ e $P_4(0; -2)$.

Respostas: a) $|z| = 2$; $Re(z) = 0$ ou $Im(z) = 0$

b) (2; 0), (0; 2), (– 2; 0) e (0; – 2)

6) $$\left.\begin{array}{l} z_1 = 3 + 4i \Rightarrow Im(z_1) = 4 \\ z_2 = 5 - 7i \Rightarrow Im(z_2) = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow Im(z_1) > Im(z_2)$$

Resposta: E

7) Para $z = 4 - 3i$, temos:

$|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

Resposta: C

8) Para $z = a + bi$, temos: $|z| + z = 2 + i \Rightarrow$

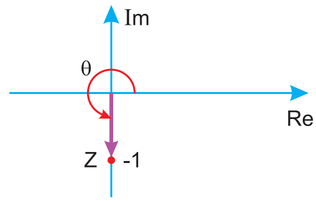
$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + (a + bi) = 2 + i \Leftrightarrow \begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + 1} = 2 - a \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

Resposta: A

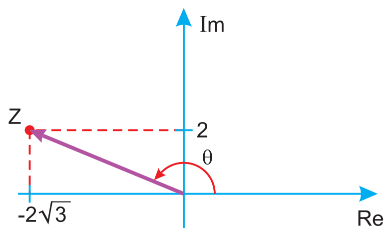
9) $z = -i$, representado no plano complexo de Argand – Gauss, fica:




Assim, $\theta = \arg(z) = 270° = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

Resposta: E

10) Para $z = -2\sqrt{3} + 2i$, temos:




I) $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

II) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 150°$

Resposta: B

11) Considerando $w = 2i$ e $z = 1 + i$, temos:

a) I) $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

II) $w^2 \cdot \bar{z} + w = (2i)^2 \cdot (1 - i) + 2i = (4i^2) \cdot (1 - i) + 2i =$
$= -4 + 4i + 2i = -4 + 6i$

b) I) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

II) $|w| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

III) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 2\sqrt{2}$

IV) $|w^2| = |w|^2 = 2^2 = 4$

Assim, a sequência: $(1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4)$ é uma P.G. cuja razão é $q = \sqrt{2}$

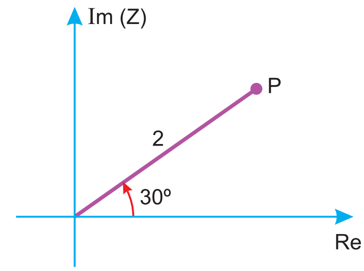
12) Para $z = 1 + \sqrt{3}\,i$, temos:

I) $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

II) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

III) A forma trigonométrica de z é $z = 2 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

13)




Na figura, temos $|z| = 2$ e $\theta = \arg(z) = 30°$, portanto:

$z = 2 \cdot (\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

Resposta: B

14) Para $z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$, temos:

I) $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

II) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{6}$

III) $z = 2 \cdot \left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Resposta: E

15) I) $z = \dfrac{i^{133} - i^{134}}{i^{1999}} = \dfrac{i^{133} \cdot (1 - i)}{i^{1999}} = \dfrac{1 - i}{i^{1866}} = \dfrac{1 - i}{i^2} = -1 + i$

II) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

III) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

IV) $z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Resposta: E

16) Sendo $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i$, temos:

I) $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1$

II) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 30°$

III) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i = \cos 30° + i\,\text{sen}\,30°$

IV) $z^n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i\right)^n = (\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)^n =$

$= \cos(30°n) + i\,\text{sen}\,(30°n)$

V) Se $z^n$ é real, de acordo com o enunciado, devemos ter:

$$\begin{cases} \text{sen}\,(30°n) = 0 \\ n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30° \cdot n = 180° \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \\ n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 6k,\ k \in \mathbb{Z} \\ n > 0 \end{cases} \Rightarrow n \in \{6; 12; 18; \ldots\}$$

VI) Como $z^n$ é real positivo, devemos ter $\cos(30°n) > 0$, assim:

- para $n = 6 \Rightarrow \cos(30° \cdot 6) = \cos 180° = -1$
- para $n = 12 \Rightarrow \cos(30° \cdot 12) = \cos 360° = 1$

Portanto, o menor $n > 0$ é 12

Resposta: E

## Módulo 11 – Função Polinomial e Dispositivo de Briot-Ruffini

1) Se $P(x) = x^3 + (2 + m)x^2 + (3 + 2m)x + 3m$, então:

$P(m) = m^3 + (2 + m) \,.\, m^2 + (3 + 2m)m + 3m =$

$= m^3 + 2m^2 + m^3 + 3m + 2m^2 + 3m =$

$= 2m^3 + 4m^2 + 6m$

2) $P(x) = x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \ldots + x^2 - x + 1; \quad P(-1) = 19$

Como os sinais dos coeficientes se alternam e $x^2$ tem coeficiente positivo, todos os termos que possuem coeficiente positivo têm expoente par e, portanto, n é par.

Para $x = -1$, tem-se:

$P(-1) = (-1)^n - (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} - \ldots + (-1)^2 - (-1)^1 + 1 =$

$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1}_{18 \text{ termos (pois } 18 + 1 = 19)} = 19$

Como de "$(-1)^n$" a "$-(-1)^1$" temos 18 termos, então n = 18.

Resposta: E

3) Se $2 \,.\, P(x) + x^2 \,.\, P(x - 1) = x^3 + 2x + 2$, então:

I) Para $x = 0 \Rightarrow 2 \,.\, P(0) + 0^2 \,.\, P(0 - 1) = 0^3 + 2 \,.\, 0 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, P(0) = 2 \Leftrightarrow P(0) = 1$

II) Para $x = 1 \Rightarrow 2 \,.\, P(1) + 1^2 \,.\, P(1 - 1) = 1^3 + 2 \,.\, 1 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, P(1) + 1 \,.\, P(0) = 1 + 2 + 2 \Leftrightarrow 2 \,.\, P(1) + 1 \,.\, 1 = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, P(1) = 4 \Leftrightarrow P(1) = 2$

Resposta: E

4) Em $P(x + 1) = x^2 - 7x + 6$, substituindo x por $x - 1$, tem-se:

$P(x - 1 + 1) = (x - 1)^2 - 7(x - 1) + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x) = x^2 - 2x + 1 - 7x + 7 + 6 \Leftrightarrow P(x) = x^2 - 9x + 14$

5) I) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$

II) $P(-x) = a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + 2 = -ax^3 + bx^2 - cx + 2$

III) $P(x) - P(-x) = 2ax^3 + 2cx$

IV) Se $P(x) - P(-x) = x^3 \Rightarrow 2ax^3 + 2cx = x^3$, então:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

V) $P(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} + b - 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{3}{2}$

Assim, $P(x) = \dfrac{1}{2} \,.\, x^3 - \dfrac{3}{2} \,.\, x^2 + 2$ e, portanto,

$P(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} + 2 = 1$ e $P(2) = \dfrac{1}{2} \,.\, 8 - \dfrac{3}{2} \,.\, 4 + 2 = 0$

Resposta: C

6) Para que o polinômio

$p(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ tenha grau 2, devemos ter:

$$\begin{cases} m - 4 = 0 \\ m^2 - 16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m \neq 4 \text{ e } m \neq -4 \end{cases} \Rightarrow \text{não existe m}$$

Resposta: E

7) $P(x) = x^5 - 7x^2 + 2x + 4$

$Q(x) = x^3 - 8$

I)
$$\begin{array}{l|l} x^5 - 7x^2 + 2x + 4 & x^3 - 8 \\ \hline -x^5 + 8x^2 & x^2 \\ \hline R(x) = x^2 + 2x + 4 & \end{array}$$

II) $R(x) = x^2 + 2x + 4$

$A = 1;\ B = 2;\ C = 4$

III) $4A + 2B + C = 4 + 4 + 4 = 12$

Resposta: C

8)
$$\begin{array}{l|l} x^4 + 69 & x^2 + 4x + 8 \\ \hline -x^4 - 4x^3 - 8x^2 & x^2 - 4x + 8 \\ \hline -4x^3 - 8x^2 + 69 & \\ +4x^3 + 16x^2 + 32x & \\ \hline 8x^2 + 32x + 69 & \\ -8x^2 - 32x - 64 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Resposta: D

9) I) $P(x) = 2 \,.\, (x + 1)^2 + x \,.\, (x - 1) + 8 =$

$= 2x^2 + 4x + 2 + x^2 - x + 8 = 3x^2 + 3x + 10$

II)
$$\begin{array}{l|l} 3x^2 + 3x + 10 & x^2 + x + 1 \\ \hline -3x^2 - 3x - 3 & 3 \\ \hline 7 & \end{array}$$

Resposta: C

10)
$$\begin{array}{l|l} P(x) & x^2 + 1 \\ \hline x + 1 & 2x - 1 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 1) \,.\, (2x - 1) + (x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 + x + 1 \Leftrightarrow P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

Resposta: D

# FRENTE 2 – ÁLGEBRA

## ■ Módulo 9 – Determinantes: Propriedades

1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ x & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix} \Leftrightarrow 10 - 5x = x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ou $x = 2$

A solução positiva, x = 2, é um número primo.

Resposta: B

2) A nova matriz obtida, de acordo com o enunciado, é $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, e o determinante dessa matriz é

$8 + 8 + 18 - 16 - 6 - 12 = 0$

Resposta: C

3) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 \\ y & x+1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \,.\, x - 0.1 + 0.1 - y.y = x(x+1) - y(y+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x^2 + x - y^2 - y \Leftrightarrow 0 = x - y \Leftrightarrow y = x$

Observe que a expressão da alternativa a está correta, pois trata-se de uma soma de *matrizes*, porém, *não é equivalente* à expressão dada no enunciado que é uma soma de *determinantes*.

Resposta: E

4) $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1-x} = 1 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 = 1 - x \Leftrightarrow (1-x)^2 - (1-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-x) \,.\, (1-x-1) = 0 \Leftrightarrow (1-x) \,.\, (-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 0 \Rightarrow x = 0$, pois deve-se ter $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{0\}$

Resposta: E

5) Se a matriz A é quadrada de ordem 2 com

$\begin{cases} a_{ij} = 2i - j, \text{ para } i = j \\ a_{ij} = 3i - 2j, \text{ para } i \neq j \end{cases}$, então:

I) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1-1 & 3.1-2.2 \\ 3.2-2.1 & 2.2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

II) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$

Resposta: E

6) I) $A - x \,.\, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - x \,.\, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 2x \\ 3x & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4x & 1-2x \\ 3-3x & 4+x \end{pmatrix}$

II) $\det(A - x \,.\, B) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2-4x) \,.\, (4+x) - (1-2x) \,.\, (3-3x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 + 2x - 16x - 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Resposta: $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -1$

7) $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ -2 & -x & 4 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix} = 175 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 18 + 3x + 24 + 2x^2 = 175 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x + 42 = 175 \Leftrightarrow 7x = 133 \Leftrightarrow x = 19$

Resposta: V = {19}

8) I) $A = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2 & y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & y \\ z & -x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ y + z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

II) $\begin{vmatrix} x & y & -1 \\ z & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -4 - 10 + 4 + 10 = 0$

Resposta: B

9) $\begin{vmatrix} 1+a & -1 \\ 3 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+a) \,.\, (1-a) + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - a^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -2$

Resposta: A

10) I) $A \,.\, B = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-4 & a-5 \\ -4-4b & -4-5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a - 4 = 1 \\ a - 5 = 0 \\ -4 - 4b = 0 \\ -4 - 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$

II) Para a = 5 e b = – 1, tem-se $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

III) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 4 = -1$

IV) $\det A^2 = \det(A \,.\, A) = \det A \,.\, \det A = (-1) \,.\, (-1) = 1$

Resposta: A

11) I) $M + k \,.\, I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + k \,.\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k & -1 \\ 2 & 5+k \end{pmatrix}$

II) $\det(M + k \,.\, I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2+k & -1 \\ 2 & 5+k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 + k) . (5 + k) + 2 = 0 \Leftrightarrow 10 + 2k + 5k + k^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 + 7k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -4$ ou $k = -3$

**Resposta: C**

12) $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$, pois cada troca de filas paralelas provoca a troca do sinal do valor do determinante. Observe que, inicialmente, trocaram de posição a 1ª e a 2ª linhas e, finalmente, trocaram de posição a 1ª e a 2ª colunas.

**Resposta: D**

13) I) $x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, pois trata-se do determinante de uma matriz e da sua transposta, cujos valores são iguais.

II) $y = \begin{vmatrix} -2a & -2c \\ 3b & 3d \end{vmatrix} = (-2) . 3 . \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = (-2) . 3 . x = -6x$

III) $\dfrac{y}{x} = \dfrac{-6x}{x} = -6$

**Resposta: C**

14) I) $\det A = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & a & m \\ 4 & b & n \\ 4 & c & p \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 . \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$

II) $\det B = \begin{vmatrix} m & a & 3 \\ n & b & 3 \\ p & c & 3 \end{vmatrix} = 3 . \begin{vmatrix} m & a & 1 \\ n & b & 1 \\ p & c & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3 . (-1) . \begin{vmatrix} 1 & a & m \\ 1 & b & n \\ 1 & c & p \end{vmatrix} =$

$= 3 . (-1) . \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$

**Resposta: D**

15) Se A é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\det A = -6$, então:
$\det(2A) = x - 97 \Rightarrow 2^4 . \det A = x - 97 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16 . (-6) = x - 97 \Leftrightarrow -96 = x - 97 \Leftrightarrow x = 1$

**Resposta: C**

16) "O determinante da matriz $A^t$ (transposta de A) é igual ao determinante da matriz A", pode ser expressa matematicamente por $\det(A^t) = \det A$

**Resposta: D**

17) $D = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & 0 \\ b-c & c-a & 0 \\ c-a & a-b & 0 \end{vmatrix} = 0$

x1 x1

**Resposta: E**

18) $\begin{vmatrix} x & x+a & x+b \\ y & y+a & y+b \\ z & z+a & z+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & a & b \\ z & a & b \end{vmatrix} =$

.(–1)

$= a . b . \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = a . b . 0 = 0$, pois a 2ª e a 3ª colunas são iguais.

**Resposta: A**

19) $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 & m+3 \\ m+2 & m+3 & m+4 \\ m+3 & m+4 & m+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & 2 \\ m+3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, pois a 2ª e a 3ª colunas são proporcionais.

.(–1)

**Resposta: A**

## Módulo 10 – Teorema de Laplace, Regra de Chió e Outras Propriedades

1) Na matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tem-se $a_{23} = 1$ e o seu cofator é dado por:

$A_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 . 2 = -2$

**Resposta: D**

2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 3x & x \\ x & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 . (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} x^2 & 3x & x \\ x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 . (-1)^3 . x . \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 . (-1) . x . x . 3 . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pois $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (filas paralelas iguais)

**Resposta: D**

3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 . (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 8 \\ 0 & 8 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 . (-1)^4 . (x^3 - 64x) = 0 \Leftrightarrow 2 . 1 . x . (x^2 - 64) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -8$ ou $x = 8$

**Resposta: D**

4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$

Multiplicando a 2ª, a 3ª e a 4ª coluna por 1 e somando-as à 1ª coluna, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 2a+1 & a & a & 0 \\ 2a+1 & 1 & 0 & a \\ 2a+1 & 0 & 1 & a \\ 2a+1 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow (2a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Multiplicando a 1ª linha por (– 1) e somando-a às outras linhas, tem-se:

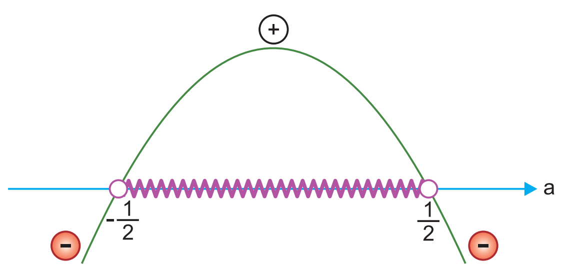
$$(2a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ 0 & 1-a & -a & a \\ 0 & -a & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a+1) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-a & -a & a \\ -a & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2a+1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot [(1-a)^2 - a^2] > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a+1) \cdot (1 - 2a + a^2 - a^2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2a+1) \cdot (1-2a) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$, pois o gráfico da função $f(a) = (2a+1) \cdot (1-2a)$ é do tipo




Resposta: B

5) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, são verdadeiras as seguintes propriedades:

I) $\det A = \det A^t$

II) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

III) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

IV) $\det A \cdot \det A^t = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

Não é verdadeira a afirmação $\det(A + B) = \det A + \det B$

Resposta: A

6) I) $A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = x^2 - 4$

II) $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = -x^2$

III) $\det(A \cdot B) = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 4) \cdot (-x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ou $-x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ ou $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 0$

Resposta: E

7) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2$

Resposta: B

8) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, tem-se:

I) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

II) $n = \det(AB) = 0$, pois a 2ª e a 3ª linha são proporcionais.

III) Para $n = 0$, tem-se $7^n = 7^0 = 1$

Resposta: 1

9) I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1$

II) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = ad - bc$

III) $\det(AB) = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot (ad - bc) = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$

Resposta: C

10) $\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} x & -8 & -5 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \operatorname{cotg} x \\ 0 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 0$, pois $\operatorname{sen} x \neq 0$ (observe que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ não existe para $\operatorname{sen} x = 0$, consequentemente, o determinante dado não poderia ser calculado).

Assim, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$

Para $0 \leq x \leq 2$, o menor valor de x é obtido fazendo $n = 0$, que resulta $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Resposta: D

## Módulo 11 – Sistemas Lineares

1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Regra de Cramer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3 - 3 + 0 - 0 - 0 - (-2) \therefore D = 2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3 - 3 + 0 - 0 - 0 - 2 \therefore D_x = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2 - 3 + 0 - 0 - (-3) - (-2) = 4 \therefore D_y = 4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3 + 2 + 0 - 3 - 0 - (-2) = 4 \therefore D_z = 4$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{2} = -1;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{2} = 2;\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

$S = \{-1; 2; 2\}$

2) $\begin{cases} 3x + z = -5 \\ x + y + z = -2 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14 \qquad x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{-7} = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{-7} = -1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$3x_0 + 5y_0 + 4z_0 = 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = -7$

**Resposta: B**

3) $\begin{cases} x + y + z = -2m \\ x - y - 2z = 2m \\ 2z + y - 2z = 3m + 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2m & 1 & 1 \\ 2m & -1 & -2 \\ 3m+5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5m - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} \Rightarrow x = \frac{-5m-5}{5} = -m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ 1 & 2m & -2 \\ 2 & 3m+5 & -2 \end{vmatrix} = 5m + 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{D_y}{D} \Rightarrow y = \frac{5m+15}{5} = m + 3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2m \\ 1 & -1 & 2m \\ 2 & 1 & 3m+5 \end{vmatrix} = -10m - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{D_z}{D} \Rightarrow z = \frac{-10m-10}{5} = -2m - 2$$

$S = \{(-m - 1; m + 3; -2m - 2)\}$

4) $\begin{cases} ax + y + a^2z = a^2 \\ bx + y + b^2z = b^2 \\ cx + y + c^2z = c^2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & a^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(c-a)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & a^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(c-a)$$

**Determinante de $D_z$ observe que é idêntico ao determinante da matriz incompleta (D) pois os resultados das equações coicidem com os coeficientes de z.**

**Resposta: E**

5) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5 \cdot 3 = 23 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ z = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 2 + 3z = 14 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

**Resposta: E**

6) $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + w = 0 \\ y + w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z = -w \\ y = 1 - w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 1 - w + (-w) = 0 \\ z = -w \\ y = 1 - w \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 1 - 2w = 0 \\ z = -w \\ y = 1 - w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ w = 1/2 \\ z = -1/2 \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ w = 1/2 \\ z = -1/2 \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ w = 1/2 \\ z = -1/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$

**Logo** $ab \cdot c \cdot d = x \cdot y \cdot w \cdot z = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

**Resposta: C**

7) **Seja h o número de homens e m o número de mulheres que aguardam o Dr. Antonio. Chegando o Dr. Antonio o número de homens será h + 1 e teremos:** $h + 1 = 4m \Rightarrow h = 4m - 1$ ①

$m + 1 = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3m + 3$ ②

**Igualando ① e ② teremos:**

$4m - 1 = 3m + 3 \Rightarrow m = 4$

$h = 4m - 1 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$

**O total de pessoas aguardando o Dr. Antônio será 19**

**(h + m = 15 + 4 = 19)**

**Resposta: B**

8) $\begin{cases} A + B + C + D = 2718 \\ 2A = \frac{B}{2} = C + 10 = D - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C + D = 2718 \\ B = 4A \\ C = 2A - 10 \\ D = 2A + 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} A + 4A + 2A - 10 + 2A + 10 = 2718 \\ B = 4A \\ C = 2A - 10 \\ D = 2A + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 302 \\ B = 4 \cdot 302 = 1208 \\ C = 2 \cdot 302 - 10 = 594 \\ D = 2 \cdot 302 + 10 = 614 \end{cases}$

**Assim: A tem R$ 302,00, B tem R$ 1208,00, C tem R$ 594,00 e D tem R$ 614,00.**

9) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 7y + z = 0 \\ 3x + 9y + 5z = 0 \end{cases}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 5 & 3 & 9 \end{array}\right| = 35 + 6 + 54 - 63 - 9 - 20 = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema possível e determinado, e a única solução é a trivial: S = {(0; 0; 0)}.

10) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 5z = 0 \\ 3x - y + 7z = 0 \\ x - 22y - 11z = 0 \end{cases}$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 3 & -1 \\ 1 & -22 & -11 & 1 & -22 \end{array}\right| = 11 + 28 - 330 + 5 + 154 + 132 = 0$$

Como o determinante do sistema é nulo, o sistema é possível e indeterminado. Descartando-se a segunda equação e subtraindo a terceira da primeira teremos:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = 0 \\ 26y + 16z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = -5z \\ y = -\dfrac{16z}{26} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{33}{26}z \\ y = -\dfrac{8}{13}z \end{cases}$$

Fazendo z = k o conjunto solução será:

$$S = \left\{\left(-\frac{33}{13}k; -\frac{8}{13}k; k\right)\right\}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$

11) $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$
Como x, y e z são números reais e a equação acima é a soma dos quadrados de três números reais, as parcelas da soma são maiores ou iguais a zero. Como a soma é zero, então cada parcela é nula:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x = y \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + x - 3 = 0 \\ x = y \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, x + y + z = 1 + 1 + 3 = 5
Resposta: C

12) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - 2my + 3z = 0 \\ 2z + 6y - 4mz = 0 \end{cases}$

Para o sistema admitir soluções diferentes da trivial o sistema deve ser possível e indeterminado, logo o determinante do sistema é nulo:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 & 4 & -2m \\ 3 & 6 & -4m & 2 & 6 \end{array}\right| = 8m^2 + 6 + 24 + 4m - 18 + 16m = 0$$

$$\Rightarrow 8m^2 + 20m + 12 = 0 \Rightarrow 2m^2 + 5m + 3 = 0$$

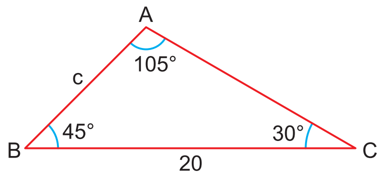
$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 \therefore m = \frac{-5 \pm 1}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{2} \text{ ou } m = -1$$

# FRENTE 3 – TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ANALÍTICA

## ■ Módulo 9 – Lei dos Senos e dos Cossenos

1) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:




I) sen 105° = sen (60° + 45°) =

= sen 60° . cos 45° + sen 45° . cos 60° =

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

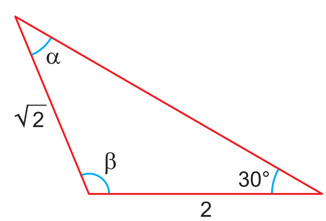
II) Pela lei dos senos, obtém-se:

$$\frac{20}{\text{sen } 105°} = \frac{c}{\text{sen } 30°} \Leftrightarrow \frac{20}{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2c = \frac{80}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow c = \frac{40}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

Resposta: C

2)




I) Pela lei dos senos, tem-se:

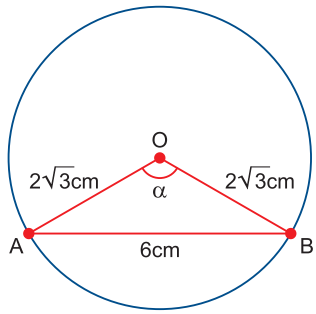
$$\frac{2}{\text{sen } \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen } 30°} \Leftrightarrow \frac{2}{\text{sen } \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \text{ sen } \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

II) $\begin{cases} \alpha + \beta + 30° = 180° \\ \alpha = 45° \end{cases} \Rightarrow 45° + \beta° + 30° = 180° \Leftrightarrow \beta = 105°$

Resposta: D

**3)**




**Seja $\alpha$ a medida do ângulo $A\hat{O}B$ $(0 < \alpha < \pi)$.**

**Pela lei dos cossenos, temos:**

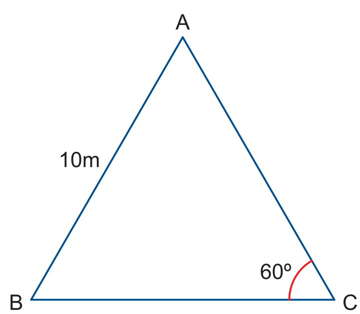
$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)\,(OB)\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 6^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

**Resposta: B**

**4)** **De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:**



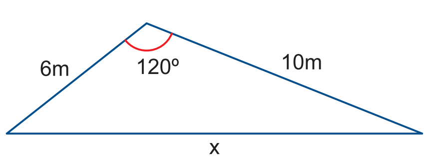

**Sendo R, em metros, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, pela lei dos senos, tem-se:**

$\dfrac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \Rightarrow \dfrac{10}{\operatorname{sen} 60°} = 2R \Leftrightarrow 2R \,.\, \operatorname{sen} 60° = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2R \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10 \Leftrightarrow R = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

**Resposta:** $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ **m**

**5)** **De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:**




**Sendo x, em metros, a medida do terceiro lado, pela lei dos cossenos, tem-se:**

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, \cos 120° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 + 100 - 2 \,.\, 6 \,.\, 10 \,.\, \left(-\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 + 100 + 60 \Leftrightarrow x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$, pois $x > 0$

**Resposta: 14 m**

**6)** **I) No triângulo BCP, pela lei dos senos, tem-se:**

$\dfrac{BC}{\operatorname{sen} 135°} = \dfrac{PB}{\operatorname{sen} 30°} \Leftrightarrow BC \,.\, \operatorname{sen} 30° = PB \,.\, \operatorname{sen} 135° \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \,.\, \dfrac{1}{2} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BC = \sqrt{12} - 2 = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$

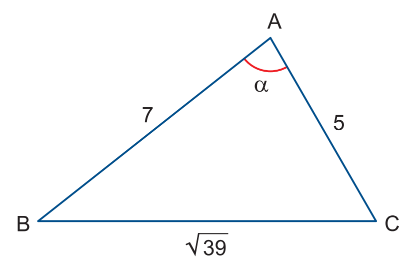
**II) No triângulo ABC, tem-se:**

$\operatorname{sen} 60° = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AB}{2(\sqrt{3} - 1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$

**Resposta:** $3 - \sqrt{3}$

**7)** **De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir:**




**Sendo $\alpha$ a medida do ângulo $B\hat{A}C$, pela lei dos cossenos, tem-se:**

$(\sqrt{39})^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 39 = 25 + 49 - 70 \,.\, \cos\alpha \Leftrightarrow 70 \,.\, \cos\alpha = 35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{35}{70} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$, pois $0° < \alpha < 180°$

**Resposta: 60°**

**8)** **Sendo $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$ e $\alpha = 60°$ o ângulo formado pelos lados *a* e *b*, a área do triângulo é dada por:**

$\dfrac{1}{2} \,.\, a \,.\, b \,.\, \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, \operatorname{sen} 60° =$

$= \dfrac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 2\sqrt{3} \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$

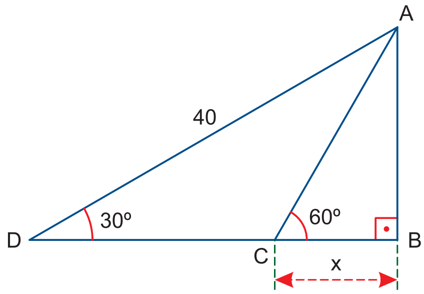
**Resposta: 6**

**9)** **De acordo com a lei dos senos e sendo R o raio da circunferência que circunscreve o triângulo ABC, temos:**

$\dfrac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \Rightarrow 4\sqrt{2} = 2R \,.\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow R = 4$

**Resposta: 4**

**10)**




I) No triângulo ABD, tem-se:

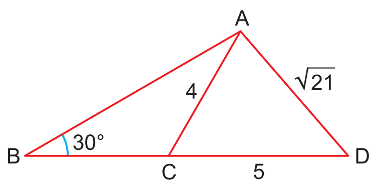
$$\text{sen } 30° = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{40} \Leftrightarrow AB = 20$$

II) No triângulo ABC, tem-se:

$$\text{tg } 60° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: E

**11)**

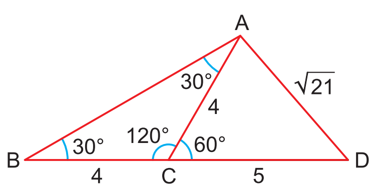



Utilizando a lei dos cossenos no triângulo ACD obtém-se:

$(\sqrt{21})^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, \cos \hat{C} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 21 = 25 + 16 - 40 \cos \hat{C} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 \cos \hat{C} = 20 \Leftrightarrow \cos \hat{C} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{C} = 60º$, pois $0° < \hat{C} < 180°$



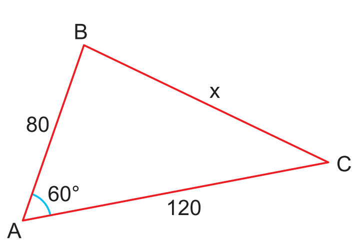

O triângulo ABC é isósceles, pois tem dois ângulos com medidas iguais a 30°. Os dois lados opostos a esses ângulos também têm medidas iguais e cada um mede 4.
A área do triângulo ABC é dada por:

$\dfrac{1}{2} \,.\, AC \,.\, BC \,.\, \text{sen } A\hat{C}B =$

$= \dfrac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 4. \text{ sen } 120° = \dfrac{1}{2} \,.\, 4 \,.\, 4. \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Resposta: B

**12)**




A distância x, em km, entre B e C é tal que:

$x^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \,.\, 120 \,.\, 80 \,.\, \cos 60º \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 14\,400 + 6\,400 - 2 \,.\, 9\,600 \,.\, \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

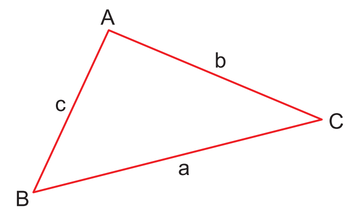
$\Leftrightarrow x^2 = 20\,800 - 9\,600 \Leftrightarrow x^2 = 11\,200 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{11200} = 10\sqrt{112}$, pois $x > 0$

$10 < \sqrt{112} < 11 \Rightarrow 100 < 10 \,.\, \sqrt{112} < 110$

Resposta: C

**13)**




I) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180° - \hat{B}$

II) $\cos \hat{B} = -\cos(180° - \hat{B}) = -\cos(\hat{A} + \hat{C})$

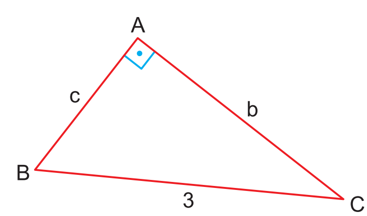
III) Pela lei dos cossenos, tem-se:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac[-\cos(\hat{A} + \hat{C})] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cos(\hat{A} + \hat{C})$

Resposta: B

**14)**




I) $\begin{cases} \dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \\ \text{sen } C = \dfrac{1}{2} \text{ sen } B \end{cases} \Rightarrow \dfrac{c}{\frac{1}{2} \text{ sen } B} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = 2c$

II) $b^2 + c^2 = 3^2 \Rightarrow (2c)^2 + c^2 = 9 \Leftrightarrow 4c^2 + c^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5c^2 = 9 \Leftrightarrow c^2 = \dfrac{9}{5} \Rightarrow c = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$, pois $c > 0$

III) $b = 2c = 2 \,.\, \dfrac{3\sqrt{5}}{5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

Resposta: $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ e $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

15) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 = 16 + 18 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 = 16 + 18 - 24 \Leftrightarrow c^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$, pois $x > 0$

**Resposta:** $\sqrt{10}$

16) a) $4^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 \cos \alpha = 2 \Leftrightarrow \cos \alpha = \dfrac{1}{9}$

b) $\dfrac{AC}{\text{sen } \beta} = \dfrac{BC}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \dfrac{3}{\text{sen } 60°} = \dfrac{4}{\text{sen } \alpha} \Leftrightarrow$

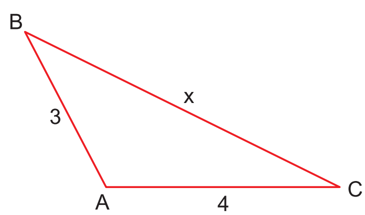
$\Leftrightarrow 3 \cdot \text{sen } \alpha = 4 \cdot \text{sen } 60° \Leftrightarrow 3 \cdot \text{sen } \alpha = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} > 1$, portanto, não existe $\alpha$.

**Respostas:** a) $\cos \alpha = \dfrac{1}{9}$

b) Nas condições propostas, não existe o triângulo.

17)




Sendo BC = x, tem-se:

$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 16 - 24 \cos \alpha \Leftrightarrow x^2 = 25 - 24 \cos \alpha$

Se $\alpha$ é obtuso, isto é, $90° < \alpha < 180°$, então:

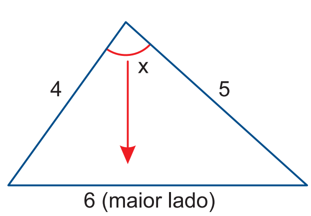
$-1 < \cos \alpha < 0 \Rightarrow 24 > -24 \cos \alpha > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < -24 \cos \alpha < 24 \Rightarrow 0 + 25 < 25 - 24 \cos \alpha < 24 + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 < x^2 < 49 \Rightarrow 5 < x < 7$

**Resposta:** D

18)

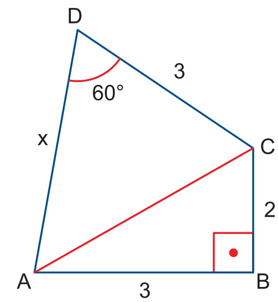



$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos x \Leftrightarrow 36 = 16 + 25 - 40 \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40 \cos x = 5 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{8}$

**Resposta:** E

19)




I) No triângulo ABC tem-se: $(AC)^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow AC = \sqrt{13}$

II) No triângulo ACD tem-se: $(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 60° \Leftrightarrow$

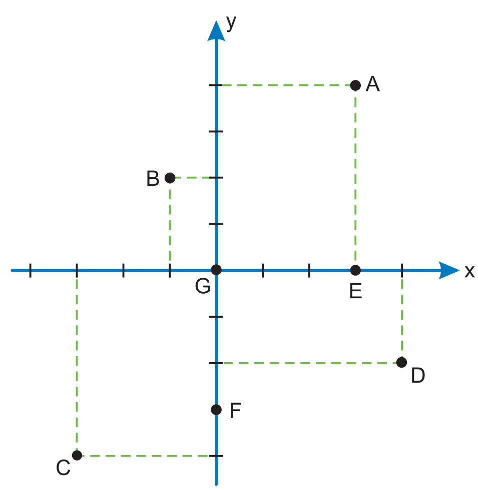
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$, pois $x > 0$

III) O perímetro, em centímetros, é $4 + 3 + 3 + 2 = 12$

**Resposta:** B

## ■ Módulo 10 – Coordenadas Cartesianas Ortogonais e Equação Geral da Reta

1)




2) Para que os pontos A(a; 3) e B(– 2; b) sejam coincidentes, os pares ordenados devem ser iguais, portanto,
(a; 3) = (– 2; b) ⇔ a = – 2 e b = 3
**Resposta:** a = – 2 e b = 3

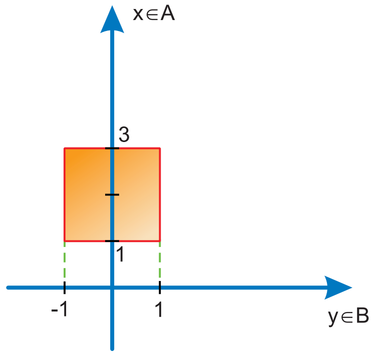
3) a) $b = 0$; b) $a = 0$;
c) $a > 0$ e $b < 0$; d) $a = -b$

4) Se $a < 0$ e $b > 0$, então:
I) P(a; – b) pertence ao 3º quadrante, pois $a < 0$ e $-b < 0$
II) Q(b; – a) pertence ao 1º quadrante, pois $b > 0$ e $-a > 0$
**Resposta:** D

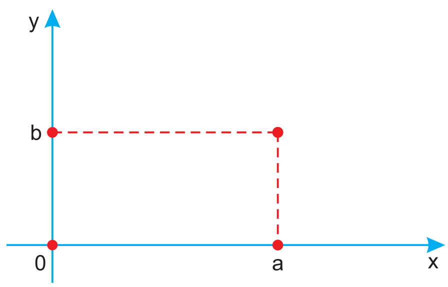
5) I) Se o ponto A(a – 3; 5) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então, $a - 3 = 5 \Leftrightarrow a = 8$
II) Se o ponto B(4; 2b) pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então, $4 = -2b \Leftrightarrow b = -2$
**Resposta:** a = 8 e b = – 2

6) a) reta paralela ao eixo das ordenadas (eixo y)
b) reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x)

7)



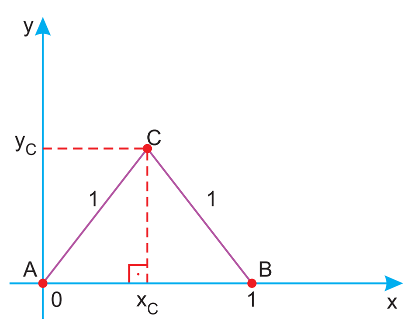

8) Representando graficamente os pontos (0; 0), (a; 0), (a; b) e (0; b), com a > b > 0, tem-se:




Ligando os pontos, na ordem dada, por linhas retas, forma-se um retângulo de área a . b, cujo centro é o ponto $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$

Resposta: retângulo; (a . b) u.a.; $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$

9) De acordo com o enunciado, tem-se a figura a seguir.




Sendo $\ell = 1$ a medida do lado do triângulo equilátero ABC, tem-se, para o vértice C:

I) $x_C = \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}$

II) $y_C = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: B

10) Observando que o quadrilátero da figura é um paralelogramo de base b = 4 e altura h = 5, sua área é dada por b . h = 4 . 5 = 20, em unidades de área.
Resposta: C

11) 1) É falsa, pois pontos de abscissa nula estão no eixo Oy.
2) É verdadeira.
3) É verdadeira.
4) É verdadeira.
5) É falsa, pois os pontos da bissetriz dos quadrantes pares são do tipo (a; – a)
Resposta: 2, 3 e 4

12) $AB = \sqrt{(5-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(0-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$AD = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$BE = \sqrt{(-4-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$

$BF = |\,5-0\,| = 5$

$CD = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

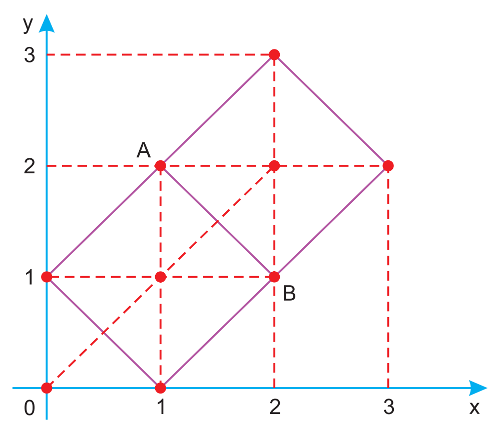
$CG = \sqrt{(-6-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

$DE = \sqrt{(-4-2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$

$EF = \sqrt{(0+4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Resposta: $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{17}$; $AD = 2\sqrt{10}$; $BE = \sqrt{85}$; $BF = 5$; $CD = \sqrt{53}$; $CG = 10$; $DE = \sqrt{61}$; $EF = 2\sqrt{5}$

13) De acordo com o enunciado, temos a figura a seguir:




Existem duas possibilidades para o quadrado ABCD, assim, tem-se:

I) Se o centro do quadrado for o ponto (1; 1), a distância à origem (0; 0) é $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

II) Se o centro do quadrado for o ponto (2; 2), a distância à origem (0; 0) é $\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Resposta: E

14) Sendo P(x; – 8), Q(3; 0) e PQ = 8, tem-se:

$PQ = \sqrt{(x-3)^2 + (-8-0)^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{(x-3)^2 + 64} \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 = (x-3)^2 + 64 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Resposta: C

15) Se P(–1; a) pertence ao 2º quadrante, então a > 0, assim, sendo Q(a; – 2) e PQ = 5, tem-se:

$PQ = \sqrt{(a+1)^2 + (a+2)^2} = 5 \Rightarrow (a+1)^2 + (a+2)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 = 25 \Leftrightarrow 2a^2 + 6a - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 3a - 10 = 0 \Leftrightarrow a - 5$ ou $a = 2 \Rightarrow a = 2$, pois $a > 0$

Resposta: E

16) Para os pontos A(3; 4), B(– 2; 4) e C(2; 2), tem-se:

I) $AB = \sqrt{(3+2)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

II) $AC = \sqrt{(3-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

III) $BC = \sqrt{(2+2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

V) O perímetro do triângulo ABC é AB + AC + BC =

$= 5 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$

Resposta: $5 + 3\sqrt{5}$

17) Para os pontos A(5; 10), B(11; 2) e C(8; 11), tem-se:

I) $AB = \sqrt{(11-5)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

II) $AC = \sqrt{(8-5)^2 + (11-10)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

III) $BC = \sqrt{(11-8)^2 + (11-2)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

IV) Como $AB^2 = AC^2 + BC^2$, tem-se que o triângulo ABC é retângulo com catetos AC e BC, assim, sua área é da por

$$\frac{AC \,.\, BC}{2} = \frac{\sqrt{10} \,.\, \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{10} \,.\, 3\sqrt{10}}{2} = \frac{3 \,.\, 10}{2} = 15$$

Respostas: Triângulo retângulo; 15u.a.

18) Para os pontos A(0; 1), B(3; 5), C(7; 2) e D(4; – 2), tem-se:

I) $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

II) $BC = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

III) $CD = \sqrt{(7-4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

IV) $DA = \sqrt{(4-0)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

V) $AC = \sqrt{(7-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$

VI) $BD = \sqrt{(4-3)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$

VII) Como AB = BC = CD = DA (lados congruentes) e AC = BD (diagonais congruentes), tem-se que o quadrilátero ABCD é um quadrado.

Resposta: Quadrado

19) Para os pontos A(2; – 2), B(– 3; – 1) e C(1; 6), tem-se:

I) $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 18 + 1 - 12 + 6 = -27 \neq 0,$

assim, os pontos A, B e C não estão alinhados, portanto, são vértices de um triângulo.

II) $AB = \sqrt{(2+3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

III) $AC = \sqrt{(2-1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

IV) $BC = \sqrt{(1+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

V) Como $AC = BC \neq AB$, tem-se que o triângulo ABC é isósceles e não equilátero.

Resposta: C

20) Para A(– 3; 6) e P(3; y), tem-se:

$AP = 10 \Rightarrow \sqrt{(3+3)^2 + (y-6)^2} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{36 + (y-6)^2} = 10 \Rightarrow 36 + (y-6)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-6)^2 = 64 \Leftrightarrow y - 6 = -8$ ou $y - 6 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 14 \Rightarrow P(3; -2)$ ou $P(3; 14)$

Resposta: P(3; – 2) ou P(3; 14)

21) Se P(x; y) é o ponto equidistante da origem O(0; 0) e dos pontos A(1; 0) e B(0; 3), então:

$$\begin{cases} PB = PO \\ PA = PO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y + 9 = 0 \\ -2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y = 9 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Resposta: $P\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

22) Se P(x; y) é o ponto equidistante dos pontos A(0; 0), B(1; 7) e C(7; – 1), então:

$$\begin{cases} PA = PB \\ PA = PC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 \\ x^2 + y^2 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 14y = 50 \\ 14x - 2y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 25 \\ 7x - y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 25 \\ 49x - 7y = 175 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 25 \\ 50x = 200 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow P(4; 3)$$

Resposta: P(4; 3)

23) Sendo M o ponto médio de AB e, sendo d, a distância entre o portão e o ponto médio de AB, temos:

$$M = \left(\frac{2+4}{2}; \frac{2+8}{2}\right) = (3;5) \text{ e } d = \sqrt{(3-3)^2 + (9-5)^2} = 4$$

Resposta: D

24) Se M(2; 3) é o ponto médio do segmento AB com A(5; 2) e $B(x_B; y_B)$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{5 + x_B}{2} = 2 \\ \dfrac{2 + y_B}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 4 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4)$$

Resposta: E

25) Se (2; 5) é o ponto médio do segmento de extremos (5; y) e (x; 7), então:

$$\begin{cases} \dfrac{5 + x}{2} = 2 \\ \dfrac{y + 7}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = -1 + 3 = 2$$

Resposta: B

26) O centro C(– 4; 1) da circunferência é o ponto médio do diâmetro de extremos P(2; 6) e $Q(x_Q; y_Q)$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{2 + x_Q}{2} = -4 \\ \dfrac{6 + y_Q}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = -10 \\ y_Q = -4 \end{cases} \Rightarrow Q(-10; -4)$$

Resposta: Q(– 10; – 4)

27) No triângulo de vértices A(3; 8), B(2; – 1) e C(6; – 3), tem-se:

I) O ponto médio do lado BC é $M\left(\dfrac{2+6}{2}; \dfrac{-1-3}{2}\right) = M(4; -2)$

II) O comprimento da mediana AM é dado por

$AM = \sqrt{(3-4)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{1 + 100} = \sqrt{101}$

Resposta: E

28) No triângulo de vértices A(1; 1), B(3; – 4) e C(– 5; 2), tem-se:

I) O ponto médio do lado AC é

$$M\left(\frac{1-5}{2}; \frac{1+2}{2}\right) = M\left(-2; \frac{3}{2}\right)$$

II) O comprimento da mediana BM é dado por

$$BM = \sqrt{(3+2)^2 + \left(-4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{121}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{221}{4}} = \frac{\sqrt{221}}{2}$$

Resposta: D

29) No triângulo de vértices A(0; 0), B(3; 7) e C(5; – 1), tem-se:

I) O ponto médio do lado BC é $M\left(\dfrac{3+5}{2}; \dfrac{7-1}{2}\right) = M(4; 3)$

II) O comprimento da mediana AM é dado por

$AM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Resposta: AM = 5

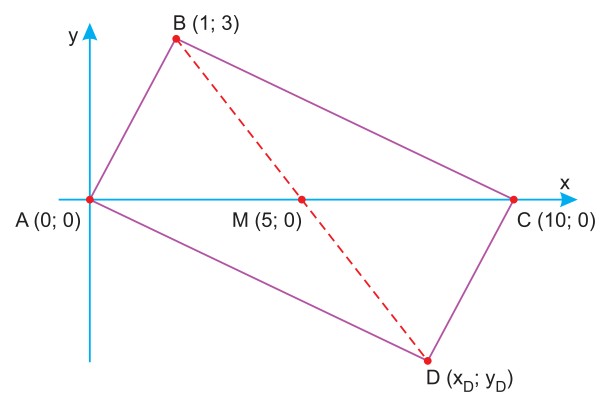
30) Sendo A(– 3; 5), B(1; 7), $C(x_C; y_C)$ e $D(x_D; y_D)$ os vértices de um paralelogramo e sendo P(1; 1) o ponto médio das diagonais, tem-se:

I) $$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = x_P \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3 + x_C}{2} = 1 \\ \dfrac{5 + y_C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = -3 \end{cases} \Rightarrow C(5; -3)$$

II) $$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = x_P \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = y_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_D}{2} = 1 \\ \dfrac{7 + y_D}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -5 \end{cases} \Rightarrow D(1; -5)$$

Resposta: (5; – 3) e (1; – 5)

31) Representando os pontos dados num sistema cartesiano, tem-se a figura a seguir.




O ponto médio da diagonal $\overline{AC}$ é M(5; 0) que coincide com o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$, assim:

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = x_M \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_D}{2} = 5 \\ \dfrac{3 + y_D}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D(9; -3)$$

Resposta: A

32) Para os pontos A(4; – 1), B(8; 1) e C(– 2; – 4), tem-se:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 32 + 2 + 8 + 16 = 0, \text{ assim, os}$$

pontos A, B e C são alinhados.

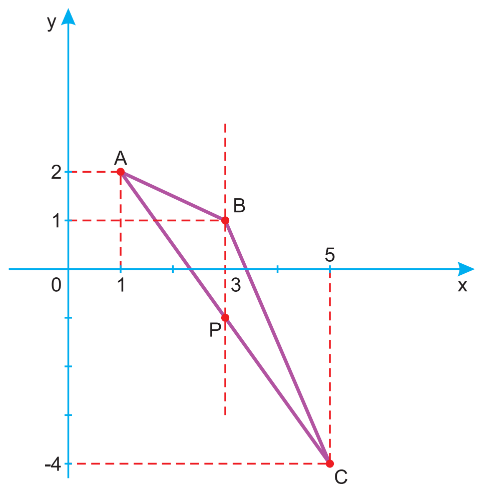
Resposta: Sim

33) Para os pontos A(– 3; – 2), B(5; 2) e C(9; 4), tem-se:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 18 + 20 - 18 + 12 + 10 = 0,$$ assim, os pontos A, B e C são colineares.

Resposta: A

34) Representando os pontos dados num sistema cartesiano, tem-se a figura a seguir:




Se o ponto P(3; m) pertence a um dos lados do triângulo ABC, observa-se que esse lado é $\overline{AC}$, assim, A, P e C devem estar alinhados, portanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m + 10 - 12 - 5m + 4 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -4m = 4 \Leftrightarrow m = -1$

Resposta: A

35) Para que os pontos A(0; a), B(a; – 4) e C(1; 2) sejam vértices de um triângulo, deve-se ter:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a + 2a + 4 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a \neq -1$ e $a \neq 4$

Resposta: D

36) I) $P(x_0; y_0)$, A(– 1; – 2) e B(2; 1) estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 2y_0 - 1 + 4 - x_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -3x_0 + 3y_0 + 3 = 0$

II) $P(x_0; y_0)$, C(– 2; 1) e D(1; – 4) estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_0 + y_0 + 8 - 1 + 4x_0 + 2y_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5x_0 + 3y_0 + 7 = 0$

III) $$\begin{cases} -3x_0 + 3y_0 + 3 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 3y_0 - 3 = 0 \\ 5x_0 + 3y_0 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ 8x_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ x_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -\dfrac{3}{2} \\ x_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Resposta: $P\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$

37) Para os pontos A(0; 2), B(4; 0) e C(– 1; – 2), tem-se:

I) $$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 8 - 8 = -18$$

II) A área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{|D|}{2} = \frac{|-18|}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Resposta: C

38) I) Se B é o ponto em que a reta x + y = 1 encontra o eixo x, então $y_B = 0$, logo, $x_B + 0 = 1 \Leftrightarrow x_B = 1$, portanto, B(1; 0)

II) Se C é o ponto em que a reta x + y = 1 encontra o eixo y, então $x_C = 0$, logo, $0 + y_C = 1 \Leftrightarrow y_C = 1$, portanto, C(0; 1)

III) Para os pontos A(3; 4), B(1; 0) e C(0; 1), tem-se:

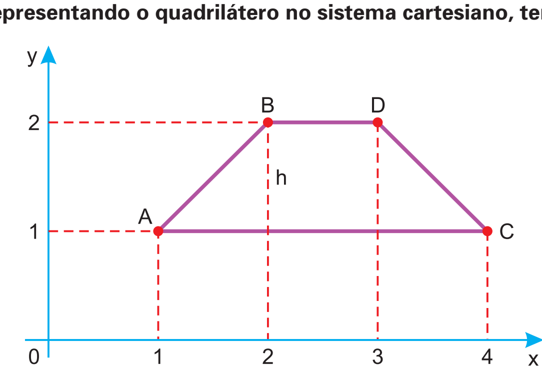
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 - 4 = -6$$

IV) A área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{|D|}{2} = \frac{|-6|}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Resposta: B

39) Representando o quadrilátero no sistema cartesiano, tem-se:

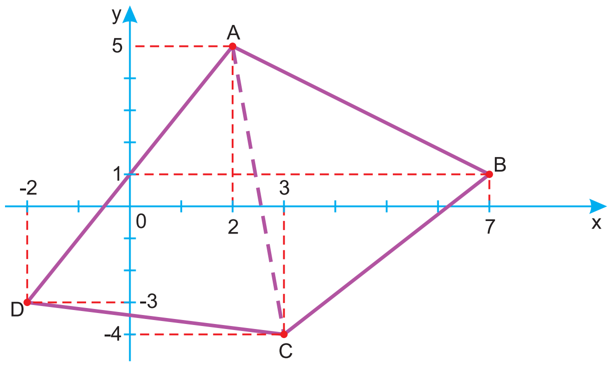



A área do quadrilátero é dada por

$$\frac{(AC + BD) \cdot h}{2} = \frac{(3 + 1) \cdot 1}{2} = 2$$

Resposta: 2u.a.

**40)** Representando o quadrilátero no sistema cartesiano, tem-se:




I) A área do triângulo ABC é $S_1 = \dfrac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \dfrac{41}{2} = 20{,}5$

II) A área do triângulo ACD é $S_2 = \dfrac{\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \dfrac{44}{2} = 22$

III) A área do quadrilátero ABCD é $S_1 + S_2 = 20{,}5 + 22 = 42{,}5$

Resposta: 42,5u.a.

**41)** Para os pontos A(1; 3), B(4; 7) e C(6; 5), tem-se:

I) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

II) $AC = \sqrt{(6-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

III) $BC = \sqrt{(6-4)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

IV) O perímetro do triângulo ABC é $5 + \sqrt{29} + 2\sqrt{2}$

V) A área do triângulo ABC é $\dfrac{\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

Resposta: $\begin{cases} \text{perímetro} = 5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{29} \\ \text{área} = 7 \end{cases}$

**42)** Se os pontos A(7; 5), B(3; – 4) e C(x; 6), com x inteiro, formam um triângulo de área 29, então:

$$\dfrac{\left|\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ x & 6 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = 29 = 8\Leftrightarrow \left|-28 + 5x + 18 + 4x - 42 - 15\right| = 58 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left|9x - 67\right| = 58 \Leftrightarrow 9x - 67 = 58$ ou $9x - 67 = -58 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{125}{9}$ ou $x = 1 \Rightarrow x = 1$, pois x é inteiro

Resposta: x = 1

**43)** Se os pontos $A\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, B(– 3; 4) e $C\left(t; -\dfrac{1}{2}\right)$ são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ t & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 + t + \frac{3}{2} - 4t + \frac{1}{4} + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8 + 4t + 6 - 16t + 1 + 12 = 0 \Leftrightarrow -12t = -27 \Leftrightarrow t = \dfrac{27}{12} = \dfrac{9}{4}$

Resposta: A

**44)** Para os pontos A(1; 2), B(3; 4) e C(4; 5), tem-se:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, portanto, A, B e C estão alinhados e pertencem ao gráfico da função f(x) = x + 1, pois f(1) = 2, f(3) = 4 e f(4) = 5

Resposta: D

**45)** A distância real entre o ponto de partida C da joaninha e o de chegada A é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 2 m e 6 m.

Assim sendo, essa distância d, em metros, é:

$d = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Resposta: A

**46)**

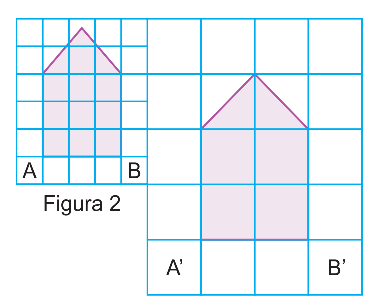



Figura 2

Figura 3

Sendo x a medida do lado da malha quadriculada da figura 2, a medida do lado da malha quadriculada da figura 3 é 2x.

Assim, A'B' = 4x, AB = 3x e, portanto, o fator de ampliação da figura 2 para a figura 3 é:

$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{4x}{3x} = \dfrac{4}{3}$

Resposta: C

**47)** $A_{\Delta ABC} = \dfrac{\left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right|}{2} = \dfrac{|-24|}{2} = 12$ u.a.

Resposta: 12 u. a.

48) Se A, B e C são vértices de um triângulo, então necessariamente:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -6k + 6 + 6 - 3k \neq 0 \Leftrightarrow 9k \neq 12 \Leftrightarrow k \neq \frac{4}{3}$$

Resposta: C

49) Sendo S a área do triângulo de vértices A(6;8), B(2;2) e C(8;4), temos:

$$S = \frac{\left\| \begin{matrix} 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{matrix} \right\|}{2} = 14$$

Resposta: C

50) Os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -16 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

Resposta: D

51) Os pontos A, B e P estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ k & k+12 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = -5$$

Portanto: 3 . k + 2 = – 13

Resposta: C

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 52) A | 53) C | 54) C | 55) A | 56) B |
| 57) C | 58) D | 59 D | 60) E | 61) A |
| 62) A | 63) A | 67) B | 68) B | |

## ■ Módulo 11 – Posição Relativa entre Duas Retas

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2) C | 3) E | 4) A | 5) C |
| 6) A | 7) E | 8) C | 9) C |
| 11) D | 13) D | 15) C | 16) E |
| 18) B | 19) D | 21) D | 23) C |
| 24) E | 26) D | 27) D | 28) B |
| 34) E | 35) B | 37) A | 38) D |
| 41) D | 42) A | 44) C | |

# FRENTE 4 – ÁLGEBRA E GEOMETRIA MÉTRICA

## ■ Módulos 9 e 10 – Combinações Simples e Probabilidade

1) Como não importa a ordem dos livros escolhidos, o número procurado é dado por $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,.\,5!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6}{3\,.\,2\,.\,1} = 56$

Resposta: 56

2) $C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,.\,4!} = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{3\,.\,2\,.\,1} = 35$

Resposta: 35

3) $C_{21,2} = \binom{21}{2} = \frac{21!}{2!\,.\,19!} = \frac{21\,.\,20}{2\,.\,1} = 210$

Resposta: 210

4) $C_{21,3} = \binom{21}{3} = \frac{21!}{3!\,.\,18!} = \frac{21\,.\,20\,.\,19}{3\,.\,2\,.\,1} = 1330$

Resposta: 1330

5) I) Dos 12 brinquedos, a criança mais nova deve ganhar 5, e o número de maneiras de escolhê-los é $C_{12,5}$.
II) Dos 7 brinquedos restantes, deve-se escolher 4 para a criança mais velha, num total de $C_{7,4}$ maneiras.
III) Os 3 brinquedos restantes ficarão com a outra criança.
Assim, o número de maneiras de distribuir os 12 brinquedos é

$$C_{12,5}\,.\,C_{7,4} = \binom{12}{5}\,.\,\binom{7}{4} = \frac{12!}{5!\,.\,7!} = \frac{7!}{4!\,.\,3!} =$$

$$= \frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9\,.\,8}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\,.\,\frac{7\,.\,6\,.\,5}{3\,.\,2\,.\,1} = 792\,.\,35 = 27720$$

Resposta: 27720

6) Para comissões de 5 pessoas com, necessariamente, 2 médicos, devem-se escolher, portanto, 3 enfermeiros entre os 6 existentes. O número de maneiras de escolhê-los é

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6\,.\,5\,.\,4}{3\,.\,2\,.\,1} = 20$$

Resposta: C

7) I) Todos os júris de 7 pessoas tem pelo menos um advogado.
II) O número de formas de compor o júri é

$$C_{10,7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{6} = 120$$

Resposta: A

8) Dos 7 professores especializados em Parasitologia, devem ser escolhidos 4 e, dos 4 especializados em Microbiologia, devem ser escolhidos 2. Assim, o número de equipes diderentes que poderão ser formadas é

$$C_{7,4}\,.\,C_{4,2} = \binom{7}{4}\,.\,\binom{4}{2} = \frac{7\,.\,6\,.\,5}{3\,.\,2\,.\,1}\,.\,\frac{4\,.\,3}{2\,.\,1} = 35\,.\,6 = 210$$

Resposta: 210

9) Temos apenas 4 salgadinhos que são servidos quentes e os 6 restantes são servidos frios.
Se a travessa deve ter exatamente 2 salgadinhos frios e só 2 quentes então o número total de possibilidades de compor essa travessa é:

$$C_{4,2}\,.\,C_{6,2} = \frac{4!}{2!\,2!}\,.\,\frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{2\,.\,2.\,2} = 90$$

Resposta: A

10) Existem 3 possibilidades:

I) A comissão é formada por 1 especialista e 2 outros profissionais. Assim, tem-se: $C_{3,1} \cdot C_{9,2} = 3 \cdot 36 = 108$

II) A comissão é formada por 2 especialistas e 1 outro profissional. Assim, tem-se: $C_{3,2} \cdot C_{9,1} = 3 \cdot 9 = 27$

III) A comissão é formada por 3 especialistas. Assim, tem-se: $C_{3,3} = 1$

O total de comissões possíveis de se formar é:
108 + 27 + 1 = 136
Resposta: D

11) $P_6^{(3A,2R)} = \dfrac{6!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60$

Resposta: 60

12) I) O número total de permutações da palavra economia é $P_8^2$.

II) O número de permutações que começam com O é $P_7$. O número das que terminam em O também é $P_7$.

III) O número de permutações que começam e terminam com O é $P_6$.

IV) O número de permutações pedidas é $P_8^2 - 2 \cdot P_7 + P_6 = 10800$

Resposta: E

13) Sejam L, L as duas letras iguais e $L_1, L_2, L_3, \ldots L_{n-2}$ as outras n – 2. Se as duas letras iguais devem ficar juntas então devemos calcular as permutações de n – 1 elementos, pois as duas letras iguais valem por uma única letra.

$$\underbrace{L_1, L_2, L_3, LL, L_4, \ldots L_{n-2}}_{n-1}$$

Assim sendo:
$(n-1)! = 120 \Leftrightarrow (n-1)! = 1.2.3.4.5 \Leftrightarrow (n-1)! = 5! \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 6$
Resposta: C

14) Lembrando que o primeiro algarismo deve ser diferente de zero, a quantidde de números de 3 algarismos existentes no sistema decimal de numeração é 9 . 10 . 10 = 900
Resposta: 900

15) Lembrando que o primeiro algarismo deve ser diferente de zero, com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4, a quantidade de números de 3 algarismos é 4 . 5 . 5 = 100
Resposta: 100

16) I) A quantidade total de números de 4 algarismos é 9 . 10 . 10 . 10 = 9000

II) A quantidade de números de 4 algarismos *distintos* é 9 . 9 . 8 . 7 = 4536

III) A quantidade de números de 4 algarismos com *pelo menos* dois algarismos iguais é 9000 – 4536 = 4464

Resposta: 4464

17) Devem-se escolher 5 frutas entre os 3 tipos disponíveis (maçãs, peras e laranjas), independente da ordem da escolha, assim, obrigatoriamente tem-se alguma repetição.
Trata-se, portanto de combinações completas de 3 elementos em grupos de 5. Assim, o número de tipos de pacotes é dado por $C^*_{3,5} = C_{3+5-1,5} = C_{7,5} = \dbinom{7}{5} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

Pode-se pensar em obter o número de soluções inteiras não negativas da equação $m + p + \ell = 5$, que é dado por
$P_7^{(5|,2+)} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

Resposta: 21

18) I) O número de comissões diferentes, de 2 pessoas cada, que podemos formar com os n diretores de uma firma é $C_{n,2}$.

Logo: $C_{n,2} = k \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = k \Leftrightarrow n \cdot (n-1) = 2k$

II) Se, ao formar estas comissões, tivermos que indicar uma das pessoas para presidente e a outra para suplente então o número de comissões será $A_{n,2}$ e portanto:
$A_{n,2} = k + 3 \Leftrightarrow n \cdot (n-1) = k + 3$

III) De (a) e (b), temos: $2k = k + 3 \Leftrightarrow k = 3$

IV) $\begin{cases} n \cdot (n-1) = 2k \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow n(n-1) = 6 \Leftrightarrow n = 3$

Resposta: A

19) Dos 200 homens, 110 não são solteiros e a probabilidade pedida é, portanto $\dfrac{110}{200} = 0{,}55 = 55\%$

Resposta: C

20) Das 12 bolas, 4 são brancas, assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

Resposta: A

21) Se o número da chapa do carro é par, o algarismo das unidades pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

A probabilidade de ser zero é $\dfrac{1}{5}$.

Resposta: E

22) Das 90 empadinhas, 60 são mais apimentadas, assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{60}{90} = \dfrac{2}{3}$.

Resposta: D

23) I) O número de bolas na urna é 100, numeradas de 1 a 100.

II) As bolas cujo número é um quadrado perfeito são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100, num total de 10 bolas.

III) As bolas cujo número é um cubo perfeito são 1, 8, 27 e 64, num total de 4 bolas.

IV) Observando que as bolas com número 1 e número 64 foram contadas duas vezes, a probabilidade pedida é $\dfrac{10 + 4 - 2}{100} = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

Resposta: C

24) I) O número de bolas na urna é 100, numeradas de 1 a 100.

II) As bolas cujo número é um quadrado perfeito são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100, num total de 10 bolas.

III) As bolas cujo número é um cubo perfeito são 1, 8, 27 e 64, num total de 4 bolas.

IV) Observando que as bolas com número 1 e número 64 foram contadas duas vezes, a probabilidade pedida é

$$\frac{10 + 4 - 2}{100} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Resposta: C

25) a) $X + X + 1 + X + 2 + X + 3 = 50 \Leftrightarrow 4X = 44 \Leftrightarrow X = 11$

b) I) Para $X = 11$, o número de bolas azuis é $X + 1 = 11 + 1 = 12$

II) Para $X = 11$, existem 3 bolas com o número 12 (uma azul, uma amarela e uma verde).

III) Observando que a bola azul com o número 12 foi contada duas vezes, a probabilidade de retirar uma bola azul ou uma bola com o número 12 é

$$\frac{12 + 3 - 1}{50} = \frac{14}{50} = \frac{28}{100} = 28\%$$

Resposta: a) 11 b) 28%

26) No conjunto S = {20; 21; 22; …; 500}:

I) Os múltiplos de 3 são os termos da progressão aritmética (21; 24; 27; …; 498), num total de 160 elementos, pois $498 = 21 + (n - 1) \,.\, 3 \Leftrightarrow n = 160$

II) Os múltiplos de 7 são os termos da progressão aritmética (21; 28; 35; …; 497), num total de 69 elementos, pois $497 = 21 + (n - 1) \,.\, 7 \Leftrightarrow n = 69$

III) Os múltiplos de 3 e 7 são os múltiplos de 21, num total de 23, pois a progressão aritmética (21; 42; 63; …; 483) possui 23 termos.

Assim sendo,

a) Em S, existem 23 múltiplos de 3 e de 7.

b) Como existem 160 + 69 – 23 = 206 elementos de S que são múltiplos de 3 ou de 7, a probabilidade de o elemento escolhido de S ser múltiplo de 3 ou 7 é

$$\frac{206}{500 - 19} = \frac{206}{481}$$

Respostas: a) 23 b) $\frac{206}{481}$

27) Das 5 pessoas, sendo duas brasileiras e três argentinas, o número de maneiras de sortear duas é $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \,.\, 4}{2 \,.\, 1} = 10$

a) Apenas um caso apresenta as duas brasileiras, assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{10}$.

b) A probabilidade de sortear pelo menos uma argentina é $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

c) Os casos que apresentam duas argentinas é $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$, assim, a probabilidade pedida é $\frac{3}{10}$.

Resposta: a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{3}{10}$

28) I) A urna contém 3 bolas, sendo uma verde, uma azul e uma branca.

II) Para a primeira bola retirada, a probabilidade é $\frac{3}{3} = 1$, pois qualquer cor pode ser registrada.

III) Para a segunda bola retirada, a probabilidade é $\frac{2}{3}$, pois a primeira é reposta e sua cor não pode ser registrada novamente.

IV) Para a terceira bola retirada, a probabilidade é $\frac{1}{3}$, pois sua cor deve ser diferente das duas registradas anteriormente e há a reposição da segunda.

V) Assim, a probabilidade pedida é $1 \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Resposta: $\frac{2}{9}$

29) Se as probabilidades de os jogadores marcarem um gol cobrando um pênalti são $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{6}$, então, as probabilidades de errarem são $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ e $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. Assim, a probabilidade de todos errarem é

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 5\%$$

Resposta: B

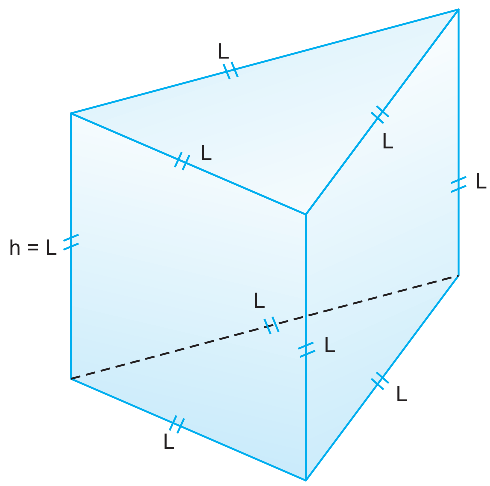
30) I) Sendo igual a 30% a probabilidade de que um animal adquira a doença no decurso de cada mês, então, a probabilidade de não adquirir a doença é igual a 70%.

II) A probabilidade de contrair a doença só no 3º mês é 70% . 70% . 30% = 0,7 . 0,7 . 30% = 14,7%, pois o animal não deve adquirir a doença no 1º nem no 2º mês.

Resposta: D

## ■ Módulo 11 – Prismas

**1)**




**I) Área lateral ($A_L$):**

$A_L = 48\ m^2 \Rightarrow 3\ .\ L^2 = 48 \Rightarrow L = 4\ m$

**II) Área da base ($A_b$):**

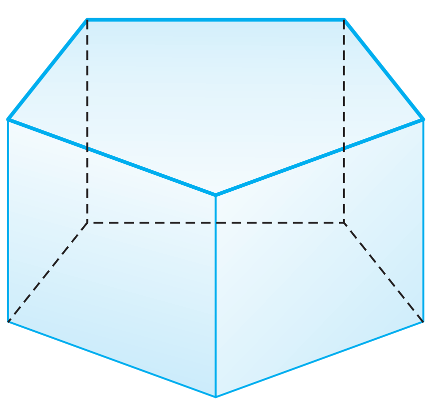
$$A_b = \frac{L^2\ .\ \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\ .\ \sqrt{3}}{4}\ m^2 = 4\sqrt{3}\ m^2$$

**III) Volume do prisma (V):**

$V = A_b\ .\ h = 4\sqrt{3}\ .\ 4\ m^3 = 16\sqrt{3}\ m^3$

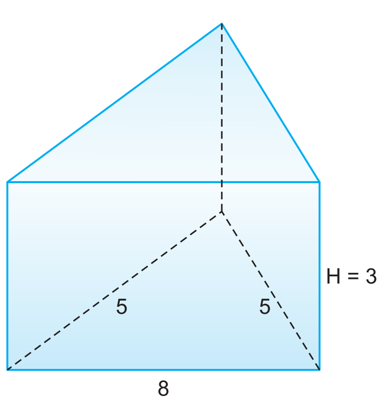
**Resposta: E**

**2)**

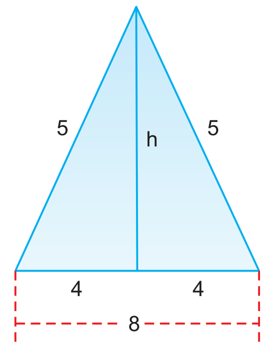


**Prisma de base pentagonal**
**Resposta: E**

**3)**




**I) Base do prisma:**




$5^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = 3$

**II) Área da base ($A_b$):**

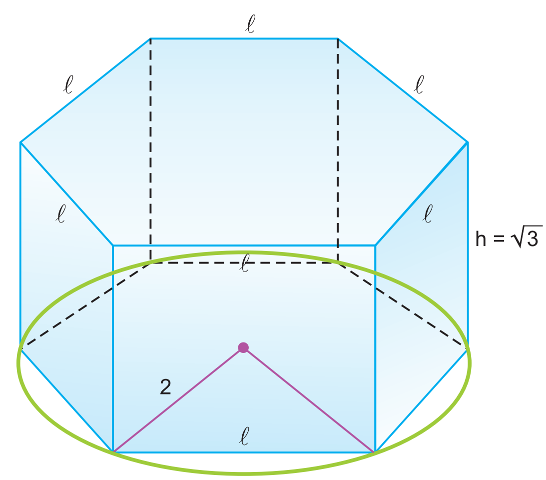
$$A_b = \frac{8\ .\ 3}{2}\ m^2 = 12\ m^2$$

**III) Volume do prisma (V):**

$V = A_b\ .\ H = 12\ m^2\ .\ 3m = 36\ m^3$

**Resposta: C**

**4)**




**I) Aresta da base ($\ell$):**

$\ell$ = raio circunferência circunscrita = 2

**II) Área base ($A_b$):**

$$A_b = 6\ .\ \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\ .\ 2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

**III) Área lateral ($A_L$):**

$A_L = 6\ .\ \ell\ .\ h = 6\ .\ 2\ .\ \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

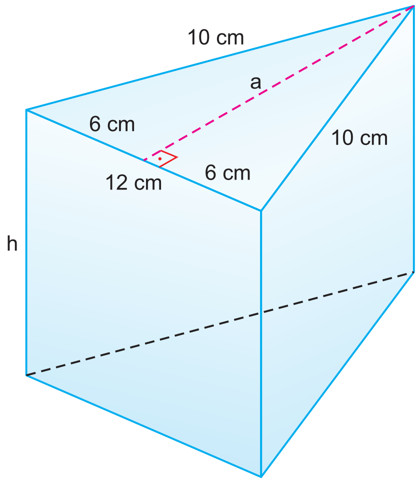
**IV) Área total ($A_T$):**

$A_T = 2\ .\ A_b + A_L = 2\ .\ 6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} =$

$= 12\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

**Resposta: B**

5)



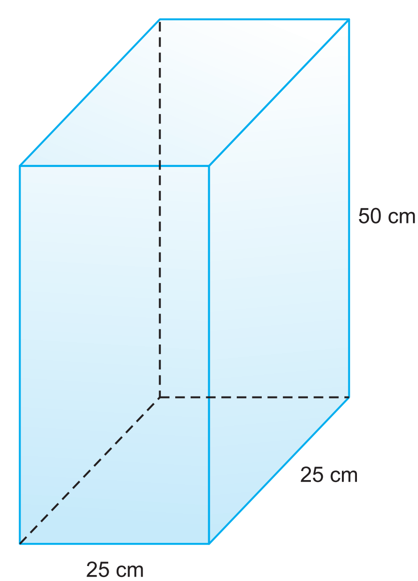

I) Altura da base (a), em cm:
$10^2 = a^2 + 6^2 \Rightarrow a = 8$

II) Área da base ($A_b$), em cm$^2$:
$A_b = \dfrac{12 \,.\, 8}{2} = 48$

III) Altura do prisma (h), em cm, e volume do prisma (V), em cm$^3$:
$V = A_b \,.\, h \Rightarrow 528 = 48 \,.\, h \Leftrightarrow h = 11$

**Resposta: B**

6)




I) Área lateral ($A_L$), em cm$^2$:
$A_L = 4 \,.\, 25 \,.\, 50 = 5000$

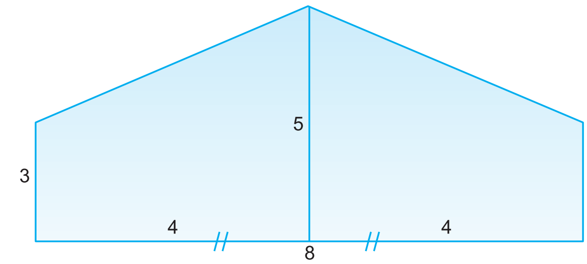
II) Área da base ($A_b$), em cm$^2$:
$A_b = 25 \,.\, 25 = 625$

III) Sendo n, em cm, o comprimento do tecido, temos:
$A_L + A_b = n \,.\, 50 \Rightarrow 5000 + 625 = n \,.\, 50 \Leftrightarrow n = 112,5$

IV) 112,5 cm = 1,125 m

**Resposta: E**

7) I) Área da base do prisma (pentágono da frente do galpão):

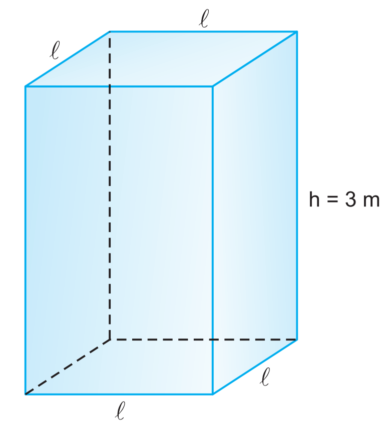



$A_b = 2 \,.\, \dfrac{(3 + 5) \,.\, 4}{2} = 32$

II) Volume galpão $= A_{base} \,.\, 12 = 32 \,.\, 12 = 384$

**Resposta: B**

8)

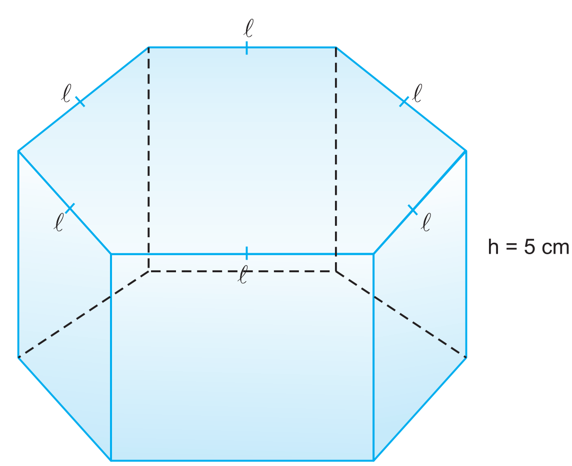



I) Área total ($A_T$), área da base ($A_b$), área lateral ($A_L$), em m$^2$, e aresta da base ($\ell$), em m:
$A_T = 2 \,.\, A_b + A_L \Rightarrow 80 = 2 \,.\, \ell^2 + 4 \,.\, \ell \,.\, 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ell^2 + 6\ell - 40 = 0 \Rightarrow \ell = 4$, pois $\ell > 0$

II) Volume do prisma (V), em m$^3$:
$V = A_b \,.\, h = \ell^2 \,.\, h = 4^2 \,.\, 3 = 48$

**Resposta: B**

9)



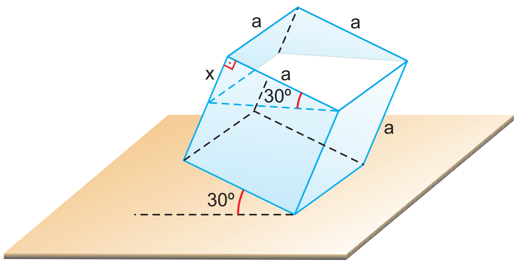

a) Considerando que os lados são as arestas de base ($\ell$), em cm, e a área lateral ($A_L$), em cm$^2$, temos:
$A_L = 6 \,.\, \ell \,.\, h \Rightarrow 60 = 6 \,.\, \ell \,.\, 5 \Leftrightarrow \ell = 2$

b) Volume do prisma (V), em $cm^3$, e área da base ($A_b$), em $cm^2$:

$$V = A_b \cdot h = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h = 6 \cdot \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 5 = 30\sqrt{3}$$

**Respostas: a) 2 cm  b) $30\sqrt{3}$ $cm^3$**

**10)**




**I) Cálculo da aresta do cubo:**

$V = 1\ell = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = a^3 \Rightarrow a = 10\ cm$

**II) Cálculo de x:**

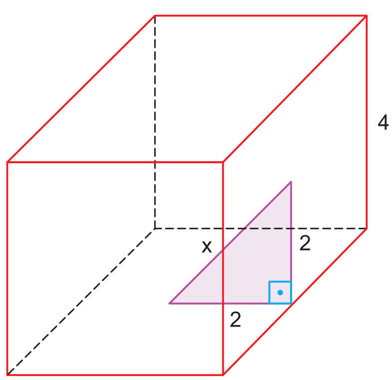
$$\text{tg } 30° = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{10\ cm} \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$$

**III) Volume do leite derramado, em $cm^3$, é o volume do prisma de base triangular e altura a.**

$$V_{leite} = A_{base} \cdot \text{altura} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 10}{2} \cdot 10 = \frac{500\sqrt{3}}{3}$$

**Resposta: C**

**11)**




$x^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

**Resposta: B**

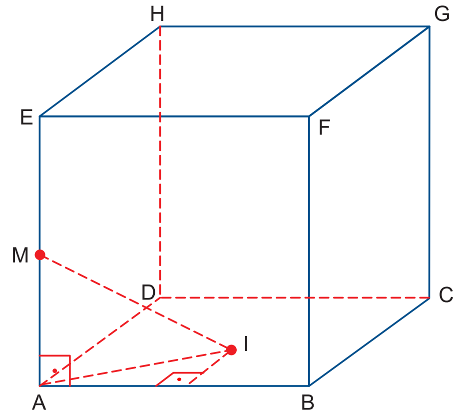
**12)** I) $AP = AB + BP = 2 + 3 = 5$

II) $PC^2 = AP^2 + AC^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow PC = \sqrt{29}$

III) $PD^2 = PC^2 + CD^2 = 29 + 2^2 = 29 + 4 = 33 \Rightarrow PD = \sqrt{33}$

**Resposta: $PC = \sqrt{29}$ e $PD = \sqrt{33}$**

**13)**




I) Se I é o centro do quadrado, então $AI = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$

II) Se M é o ponto médio de AE, então $AM = \frac{a}{2}$

III) Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo MAI, temos $(MI)^2 = (AM)^2 + (AI)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (MI)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Resposta: C**

**14)** Seja *a* a medida da aresta do cubo de volume $V = a^3$.

I) $(a - 1)^3 = V - 61 \Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a^3 - 61 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3a^2 + 3a + 60 = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0 \Rightarrow a = 5$, pois $a > 0$

II) A área total do cubo é $6 \cdot a^2 = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$

**Resposta: C**

**15)** O triângulo EDG é equilátero de lado $20\sqrt{2}$ cm, pois os segmentos ED, DG e EG são as diagonais das faces ADHE, CDHG e EFGH do cubo, respectivamente. Logo, sua área S, em $cm^2$, é dada por:

$$S = \frac{(20\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 200\sqrt{3}$$

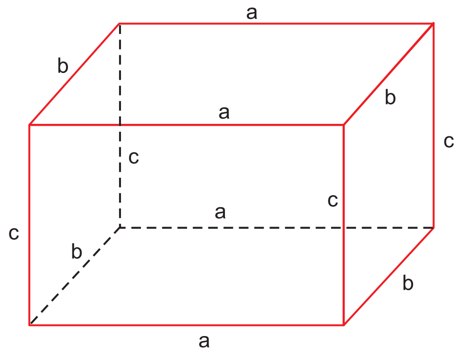
**Resposta: C**

**16)** De acordo com o enunciado, temos:

$80\% \cdot 20 \cdot 8 \cdot h = 256 \Leftrightarrow 128 \cdot h = 256 \Leftrightarrow h = 2$

**Resposta: B**

17) **Sejam a, b e c as medidas, em cm, das dimensões do paralelepípedo:**




I) $\begin{cases} abc = 240 \\ ab = 30 \end{cases} \Rightarrow c = 8$

II) $\begin{cases} abc = 240 \\ ac = 48 \end{cases} \Rightarrow b = 5$

**III) b = 5 e c = 8, então bc = 40**

**IV) A área total do paralelepípedo, em cm², é:**

$A_T = 2(ab + ac + bc) = 2(30 + 48 + 40) = 2 \,.\, 118 = 236$

**Resposta: C**

18) **A área total do sólido é dada por:**

$A_T = 2 \,.\, (13 \,.\, 7 - 5 \,.\, 3) + 2 \,.\, (7 \,.\, 2) + 2 \,.\, (13 \,.\, 2) + 2 \,.\, (3 \,.\, 2) =$

$= 2 \,.\, 76 + 2 \,.\, 14 + 2 \,.\, 26 + 2 \,.\, 6 = 244$

**Resposta: D**

19) **Para que o volume do bloco ($V_b$) seja igual ao volume do orifício ($V_0$), o volume do cubo ($V_c$), em cm³, deverá ser tal que:**

$V_c = 2V_0 \Rightarrow 80 \,.\, 80 \,.\, 80 = 2 \,.\, L \,.\, L \,.\, 80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L^2 = 3\,200 \Leftrightarrow L = 40\sqrt{2}$

**Resposta: B**

20) **I) O volume total da carroça é 1 m . 1 m . 2 m = 2 m³.**

**II) Se x, em metros, for a altura da nova carroça, então:**

$2 \,.\, 1 \,.\, x = 1{,}2 \,.\, 2 \Leftrightarrow x = 1{,}2$

**Resposta: B**