CADERNO 2 – SEMIEXTENSIVO D

FRENTE 1 – ÁLGEBRA

Módulo 5 – Logaritmos – Definição e Existência

1) a) $\log_2 8 = \alpha \Leftrightarrow 2^\alpha = 8 \Leftrightarrow 2^\alpha = 2^3 \Leftrightarrow \alpha = 3$

b) $\log_3 81 = \alpha \Leftrightarrow 3^\alpha = 81 \Leftrightarrow 3^\alpha = 3^4 \Leftrightarrow \alpha = 4$

c) $\log_4 64 = \alpha \Leftrightarrow 4^\alpha = 64 \Leftrightarrow (2^2)^\alpha = 2^6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2\alpha} = 2^6 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$

d) $\log_8 32 = \alpha \Leftrightarrow 8^\alpha = 32 \Leftrightarrow (2^3)^\alpha = 2^5 \Leftrightarrow 2^{3\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{3}$

e) $\log_9 27 = \alpha \Leftrightarrow 9^\alpha = 27 \Leftrightarrow (3^2)^\alpha = 3^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2\alpha} = 3^3 \Leftrightarrow 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{3}{2}$

f) $\log_8(4\sqrt{2}) = \alpha \Leftrightarrow 8^\alpha = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^3)^\alpha = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{3\alpha} = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 3\alpha = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{6}$

g) $\log_{27}(9\sqrt{3}) = \alpha \Leftrightarrow 27^\alpha = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow (3^3)^\alpha = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{3\alpha} = 3^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 3\alpha = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{5}{6}$

2) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = \alpha \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^\alpha = 32 \Leftrightarrow 4^{-\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^2)^{-\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow 2^{-2\alpha} = 2^5 \Leftrightarrow -2\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{5}{2}$

Resposta: E

3) $\log_6 7776 = \alpha \Leftrightarrow 6^\alpha = 7776 \Leftrightarrow 6^\alpha = 2^5 \cdot 3^5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6^\alpha = (2 \cdot 3)^5 \Leftrightarrow 6^\alpha = 6^5 \Leftrightarrow \alpha = 5$

Resposta: B

4) Sendo b a base procurada, onde $b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

$\log_b\left(\dfrac{81}{16}\right) = -4 \Leftrightarrow b^{-4} = \dfrac{81}{16} \Leftrightarrow b^{-4} = \dfrac{3^4}{2^4} \Leftrightarrow b^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow b = \dfrac{2}{3}$

5) $[\log_5(25 \log_2 32)]^3 = [\log_5(5^2 \cdot \log_2 2^5)]^3 =$

$= [\log_5(5^2 \cdot 5)]^3 = [\log_5 5^3]^3 = 3^3 = 27$

6) I) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

II) $\log_4 32 = x \Leftrightarrow 4^x = 32 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

III) $\log_2 16 - \log_4 32 = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{8-5}{2} = \dfrac{3}{2}$

Resposta: B

7) I) $\log_{\frac{1}{3}}(3\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

II) $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = y \Leftrightarrow 2^y = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2^y = 2^{-2} \Leftrightarrow y = -2$

III) $\log_5 5 = 1$

IV) $M = \log_{\frac{1}{3}}(3\sqrt{3}) - \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) - \log_5 5 = -\dfrac{3}{2} + 2 - 1 =$

$= -\dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{-3+2}{2} = -\dfrac{1}{2}$

8) I) $\log_8 2^x = y + 1 \Leftrightarrow 2^x = 8^{y+1} \Leftrightarrow 2^x = (2^3)^{y+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^x = 2^{3y+3} \Leftrightarrow x = 3y + 3 \Leftrightarrow x - 3y = 3$

II) $\log_3 9^y = x - 9 \Leftrightarrow 9^y = 3^{x-9} \Leftrightarrow (3^2)^y = 3^{x-9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{2y} = 3^{x-9} \Leftrightarrow 2y = x - 9 \Leftrightarrow -x + 2y = -9$

III) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 3 \\ -y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow x - y = 21 - 6 = 15$

Resposta: E

9) Se a e b são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$, então $a \,.\, b = 10$

Assim, $\log\left(\dfrac{1}{ab}\right) = \log\dfrac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$

Resposta: B

10) Fazendo $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, temos:
$a^{\log_a b} = a^x = b$
Resposta: A

11) $\frac{2}{3} \cdot \log_b 27 + 2 \cdot \log_b 2 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b (27)^{\frac{2}{3}} + \log_b 2^2 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b (3^3)^{\frac{2}{3}} + \log_b 4 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow \log_b 3^2 + \log_b 4 - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b (3^2 \cdot 4) - \log_b 3 = -1 \Leftrightarrow \log_b \left(\frac{3^2 \cdot 4}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b 12 = -1 \Leftrightarrow b^{-1} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 12 \Leftrightarrow b = \frac{1}{12}$

Resposta: B

12) $\log_4(24{,}96) - \log_4(3{,}12) = \log\left(\frac{24{,}96}{3{,}12}\right) = \log_4 8$

Fazendo $\log_4 8 = x \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Portanto, $\log_4(24{,}96) - \log_4(3{,}12) = \frac{3}{2}$

Resposta: B

13) $\log_3 b - \log_3 a = 4 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{b}{a}\right) = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right) = 3^4 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right) = 81$

Resposta: C

14) Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, então:

$\log_{10} 1{,}23 = \log_{10}\left(\frac{123}{100}\right) = \log_{10} 123 - \log_{10} 100 = 2{,}09 - 2 = 0{,}09$

Resposta: B

15) $\log m = 2 - \log 4 \Leftrightarrow \log m + \log 4 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log(m \cdot 4) = 2 \Leftrightarrow 4m = 10^2 \Leftrightarrow m = \frac{100}{4} \Leftrightarrow m = 25$

Resposta: D

16) $\log x = \log b + 2 \log c - \frac{1}{3} \log a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log x = \log b + \log c^2 - \log a^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log x = \log(b \cdot c^2) - \log \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log x = \log\left(\frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$

Resposta: D

17) $\log \sqrt{x} = \log y^2 + \frac{1}{2} \cdot \log y + \log y^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log \sqrt{x} = \log y^2 + \log y^{\frac{1}{2}} + \log y^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log \sqrt{x} = \log(y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-3}) \Leftrightarrow \log \sqrt{x} = \log y^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = y^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow x = y^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

Resposta: B

18) Se $\log_c a = 3$, $\log_c b = 4$ e $y = \frac{a^3 \cdot \sqrt{b \cdot c^2}}{b \cdot c^4}$, então:

$\log_c y = \log_c\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{b \cdot c^2}}{b \,.\, c^4}\right) = \log_c(a^3\sqrt{b \,.\, c^2} \,.\, b^{-1} \,.\, c^{-4}) =$

$= \log_c(a^3 \,.\, \sqrt{b} \,.\, c \,.\, b^{-1} \,.\, c^{-4}) = \log_c(a^3 \,.\, b^{-\frac{1}{2}} \,.\, c^{-3}) =$

$= \log_c a^3 + \log_c b^{-\frac{1}{2}} + \log_c c^{-3} =$

$= 3 \cdot \log_c a - \frac{1}{2} \cdot \log_c b - 3 \cdot \log_c c =$

$= 3 \,.\, 3 - \frac{1}{2} \,.\, 4 - 3 \,.\, 1 = 9 - 2 - 3 = 4$

Resposta: C

19) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então:

$\log 72 = \log(2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$

$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 3x + 2y$

Resposta: B

20) $\frac{1}{4} \cdot \log m^5 - \frac{3}{4} \cdot \log m = \log \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \log m - \frac{3}{4} \cdot \log m = \log \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \cdot \log m = \log 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \log m = \frac{1}{2} \cdot \log 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log m = \log 3 \Leftrightarrow m = 3$

Resposta: B

21) I) $2 \cdot \log_2(1 + \sqrt{2}x) - \log_2(\sqrt{2}x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(1 + \sqrt{2}x)^2 - \log_2(\sqrt{2}x) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left[\frac{(1 + \sqrt{2}x)^2}{\sqrt{2}x}\right] = 3 \Leftrightarrow \frac{(1 + \sqrt{2}x)^2}{\sqrt{2}x} = 2^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{2}x)^2 = 8\sqrt{2}x \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2 = 8\sqrt{2}x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6\sqrt{2}) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 2} = \frac{6\sqrt{2} \pm 8}{4}$

Como a é o menor valor de x, temos que: $a = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}$

II) $\log_2\left(\dfrac{2a+4}{3}\right) = \log_2\left[\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)+4}{3}\right] =$

$= \log_2\left[\dfrac{3\sqrt{2}-4+4}{3}\right] = \log_2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\log_2 2 = \dfrac{1}{2}$

Resposta: B

22) Se $\log_2 3 = a$ e $\log_3 5 = b$, então:

$\log_3 2 + \log_3 25 \cdot \log_5 2 = \log_3 2 + \log_3 5^2 \cdot \log_5 2 =$

$= \log_3 2 + 2\cdot\log_3 5 \cdot \dfrac{\log_3 2}{\log_3 5} =$

$= \log_3 2 + 2\cdot\log_3 2 = 3\cdot\log_3 2 = 3\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = 3\cdot\dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{a}$

Resposta: D

23) $x = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25}\sqrt[3]{2} = \log_3 5 \cdot \dfrac{\log_3 27}{\log_3 4} \cdot \dfrac{\log_3\sqrt[3]{2}}{\log_3 25} =$

$= \log_3 5 \cdot \dfrac{3}{\log_3 2^2} \cdot \dfrac{\log_3 2^{\frac{1}{3}}}{\log_3 5^2} = \log_3 5 \cdot \dfrac{3}{2\cdot\log_3 2} \cdot \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\log_3 2}{2\cdot\log_3 5} =$

$= 1 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{1}{4}$

Resposta: C

24) $x\cdot\left(\log_2(7^x) + \log_2\left(\dfrac{7}{3}\right)\right) + \log_2(21^x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot[x\,.\,\log_2 7 + \log_2 7 - \log_2 3] + x\cdot\log_2 21 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot[x\,.\,\log_2 7 + \log_2 7 - \log_2 3 + \log_2(3\cdot 7)] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot(x\cdot\log_2 7 + \log_2 7 - \log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 7) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot(x\,.\,\log_2 7 + 2\cdot\log_2 7) = 0 \Leftrightarrow x\cdot\log_2 7\cdot(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

Resposta: D

25) $\log_{a^2}\sqrt{5} + \log_{a^3}\sqrt{5} = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow \dfrac{\log_a\sqrt{5}}{\log_a a^2} + \dfrac{\log_a\sqrt{5}}{\log_a a^3} = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_a\sqrt{5}}{2\cdot\log_a a} + \dfrac{\log_a\sqrt{5}}{3\cdot\log_a a} = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow \dfrac{\log_a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\log_a\sqrt{5}}{3} = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{6\log_a\sqrt{5} + 4\log_a\sqrt{5}}{12} = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow 10\cdot\log_a\sqrt{5} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_a\sqrt{5} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow a = 5$

Resposta: D

26) I) $\log_{10}3 = \dfrac{12}{25} \Leftrightarrow \log_3 10 = \dfrac{25}{12}$

II) Se $a^2 + b^2 = 28ab$, então:

$\log_3\left(\dfrac{(a+b)^2}{ab}\right) = \log_3\left(\dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab}\right) = \log_3\left(\dfrac{28ab+2ab}{ab}\right) =$

$= \log_3\left(\dfrac{30ab}{ab}\right) = \log_3 30 = \log_3(3\cdot 10) = \log_3 3 + \log_3 10 =$

$= 1 + \dfrac{25}{12} = \dfrac{12+25}{12} = \dfrac{37}{12}$

Resposta: A

27) $\begin{cases} x\cdot y = 3 \\ \log_3 x + \log_9 y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ \log_3 x + \dfrac{\log_3 y}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ 2\cdot\log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ \log_3 x^2 + \log_3 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ \log_3(x^2\cdot y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ x^2\cdot y = 3^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ x\cdot x\cdot y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 3 \\ x\cdot 3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 9 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{27+1}{3} = \dfrac{28}{3}$

Resposta: C

28) I) Observe que: $1 + \dfrac{1}{24} = \dfrac{25}{24}$

II) população atual: P

população após 1 ano: $P\cdot\dfrac{25}{24}$

população após 2 anos: $P\cdot\left(\dfrac{25}{24}\right)^2$

⋮

população após t anos: $P\,.\left(\dfrac{25}{24}\right)^t$

III) Devemos ter: $P\cdot\left(\dfrac{25}{24}\right)^t = 2\cdot P \Leftrightarrow \left(\dfrac{25}{24}\right)^t = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left(\dfrac{25}{24}\right)^t = \log 2 \Leftrightarrow t\cdot\log\left(\dfrac{25}{24}\right) = \log 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\cdot\log\left(\dfrac{100}{96}\right) = \log 2 \Leftrightarrow t\cdot(\log 100 - \log 96) = \log 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\cdot[2 - \log(2^5\cdot 3)] = \log 2 \Leftrightarrow t\cdot(2 - 5\cdot\log 2 - \log 3) = \log 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\cdot(2 - 5\cdot 0{,}30 - 0{,}48) = 0{,}3 \Leftrightarrow t\cdot(0{,}02) = 0{,}3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{0{,}3}{0{,}02} = 15$

Resposta: t = 15 anos

29) Para $\log_{10}2 = m$ e $\log_{10}3 = n$, temos:

$$\log_5 6 = \frac{\log_{10}6}{\log_{10}5} = \frac{\log_{10}(2\cdot 3)}{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log_{10}2 + \log_{10}3}{\log_{10}10 - \log_{10}2} = \frac{m+n}{1-m}$$

Resposta: D

30) I) $\log_5 81 = k \Leftrightarrow \log_5 3^4 = k \Leftrightarrow 4 \cdot \log_5 3 = k \Leftrightarrow \log_5 3 = \frac{k}{4}$

II) $$\log_3\sqrt{15} = \frac{\log_5\sqrt{15}}{\log_5 3} = \frac{\log_5 15^{\frac{1}{2}}}{\log_5 3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\log_5 15}{\frac{k}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k}\cdot\log_5 15 = \frac{2}{k}\cdot\log_5(3\cdot 5) = \frac{2}{k}\cdot[\log_5 3 + \log_5 5]$$

$$= \frac{2}{k}\cdot\left[\frac{k}{4}+1\right] = \frac{2}{k}\cdot\left[\frac{k+4}{4}\right] = \frac{k+4}{2k}$$

Resposta: D

31) I) $5^p = 2 \Leftrightarrow \log_5 2 = p$

$$\log_2 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 2} = \frac{\log_5 10^2}{p} = \frac{2\cdot\log_5 10}{p} =$$

$$= \frac{2\cdot\log_5(2\cdot 5)}{p} = \frac{2\cdot[\log_5 2 + \log_5 5]}{p} = \frac{2\,[p+1]}{p} = \frac{2p+2}{p}$$

Resposta: E

Módulo 6 – Equações e Inequações Logarítmicas

1) $\log x + \log(x-5) = \log 36 \Leftrightarrow \log[x\cdot(x-5)] = \log 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\cdot(x-5) = 36 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 9$
Pela condição de existência dos logaritmos, devemos ter $x > 5$, então a única solução é $x = 9$.
Resposta: D

2) $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = x^{\log_x 5}$
Pela condição de existência dos logaritmos, devemos ter:
a) $(x+2) > 0 \Leftrightarrow x > -2$
b) $(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$
c) $x > 0$ e $x \neq 1$
Assim, (a) $\cap$ (b) $\cap$ (c) $\Rightarrow x > 2$
Desta forma, $\log_2[(x+2)\cdot(x-2)] = x^{\log_x 5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(x^2-4) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$
Pela condição de existência dos logaritmos, temos S = {6}
Resposta: E

3) I) Condições de existência:

$$\begin{cases} 5x+1>0 \\ 1-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x < \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$$

II) $$\log\sqrt{5x+1} - \log(1-5x) = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{\sqrt{5x+1}}{1-5x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x+1}}{1-5x} = 10^0 \Leftrightarrow \sqrt{5x+1} = 1-5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x+1})^2 = (1-5x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+1 = 1 - 10x + 5x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

III) $$\begin{cases} -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5} \\ x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Resposta: C

4) $2\log_5 x = \log_5 x + \log_5 8 \Leftrightarrow \log_5 x^2 = \log_5(x\cdot 8) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 8$
Pela condição de existência dos logaritmos, $x > 0$.
Assim, S = {8}
Resposta: B

5) a) I) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \log_3(9x^2) = 1 \Leftrightarrow 9x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

Para $x > 0$, temos:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_f = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

II) $g(x) = -3 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{x}\right) = -3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3^{-3} \Leftrightarrow x = 3^3 = 27 \Rightarrow V_g = \{27\}$$

b) $1 + f(x) + g(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= 1 + \log_3 9 + \log_3 x^2 + \log_3 x^{-1} =$

$= 1 + 2 + 2\,.\log_3 x - 1\,.\log_3 x = 3 + \log_3 x$

6) $$\begin{cases} 2\,.\log_y x + (\log_x y)^{-1} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,.\log_y x + \frac{1}{\log_x y} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,.\log_y x + \log_y x = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,.\log_y x = 6 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x = 2 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^2 - y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = 4 \text{ ou } y = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ pois } x > 1 \text{ e } y > 1$$

Assim, $x + y = 16 + 4 = 20$
Resposta: C

7) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ \log_2 x - \log_2 y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ 2 \,.\, \log_2 x = 4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ \log_2 x = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ x = 4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2 + \log_2 y = 5\\ x = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 y = 3\\ x = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 8\\ x = 4\end{cases} \Rightarrow V = \{(4;\, 8)\}$

8) $\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{3})^x}{3} = 3^y\\[2mm] \dfrac{\log\,(x-1) - \log y}{2} = \log \sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^y \,.\, 3\\[2mm] \log\,(x-1) - \log y = 2 \,.\, \log\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3^{\frac{x}{2}} = 3^{y+1}\\[2mm] \log\left(\dfrac{x-1}{y}\right) = \log\,(\sqrt{3})^2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{2} = y + 1\\[2mm] \dfrac{x-1}{y} = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2y + 2\\ x = 3y + 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2y + 2\\ 3y + 1 = 2y + 2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 2y + 2\\ y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4\\ y = 1\end{cases} \Rightarrow x + y = 5$

Resposta: A

9) $\log_2(x-2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x-2) - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-2) - \dfrac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_2(x-2) - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-2)^2 - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{(x-2)^2}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = \dfrac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 4 + 2\sqrt{3}$, pois $x > 2$

Resposta: D

10) Sendo log 1,5 = 0,18, temos:

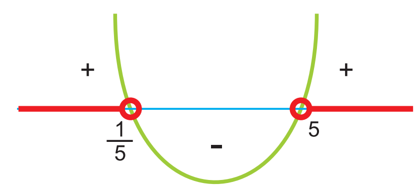
$\log 2^x - \log 3^x = 9 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{2^x}{3^x}\right) = 9 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot \log\left(\dfrac{2}{3}\right) = 9 \Leftrightarrow x \cdot \log\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = 9 \Leftrightarrow -x \cdot \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x \,.\, \log 1{,}5 = 9 \Leftrightarrow -x \,.\, 0{,}18 = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{-9}{0{,}18} \Leftrightarrow x = -50$

Resposta: C

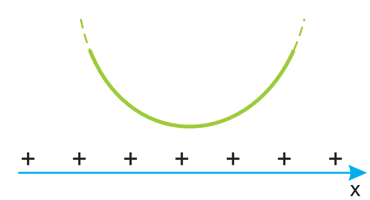
11) $5x^2 - 26x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{5}$ ou $x > 5$, pois o gráfico de $g(x) = 5x^2 - 26x + 5$ é do tipo:



Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < \dfrac{1}{5} \text{ ou } x > 5\right\}$

Resposta: C

12) $x^2 + x + 7 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois o gráfico de $g(x) = x^2 + x + 7$ é do tipo:



Assim, temos: $D(f) = \mathbb{R}$

Resposta: E

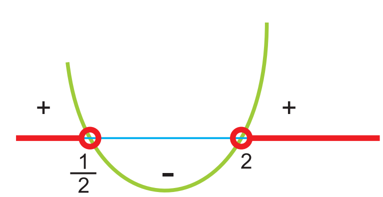
13) O campo de definição de uma função é o conjunto para o qual a função está definida. Em outras palavras, o campo de definição é o mesmo que o domínio da função.

Desta forma, pela condição de existência dos logaritmos, temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 > 0 \text{ e } x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1\}$

Assim sendo:

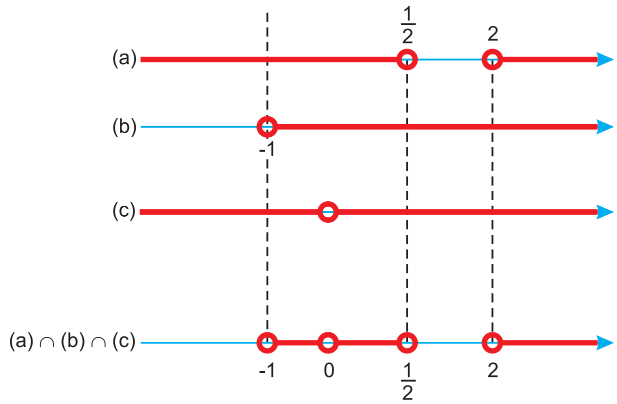
a) $2x^2 - 5x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$ ou $x > 2$, pois o gráfico de $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$ é do tipo:



b) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

c) $x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

De (a) ∩ (b) ∩ (c), temos:



Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x < 0 \text{ ou } 0 < x < \dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

Resposta: D

14) Se os pontos (1, 2) e (5, 10) pertencem ao gráfico de $f(x) = a \cdot b^{\log_2 x}$, temos:

I) $f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot b^{\log_2 1} = 2 \Rightarrow a \cdot b^0 = 2 \Rightarrow a = 2$

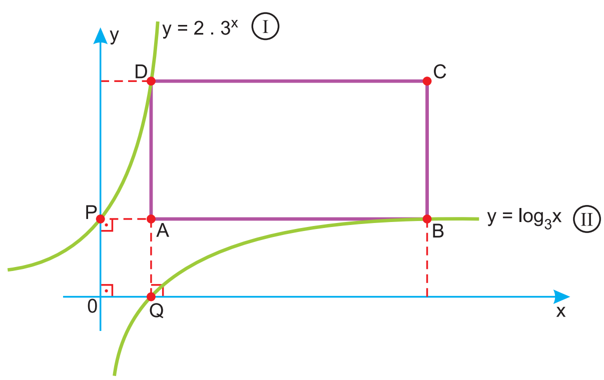
II) $f(5) = 10 \Rightarrow 2 \cdot b^{\log_2 5} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^{\log_2 5} = 5 \Rightarrow \log_b 5 = \log_2 5 \Leftrightarrow b = 2$

Logo, a + b = 2 + 2 = 4

Resposta: B

15)



Fazendo x = 0 em (I), temos:

$y = 2 \cdot 3^0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow OP = 2$

Fazendo y = 0 em (II), temos:

$\log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 3^0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow OQ = 1$

Desta forma, A(1, 2)

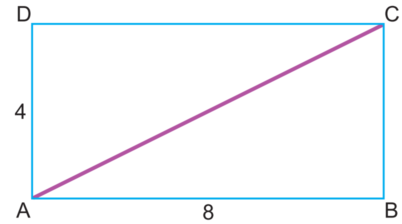
Fazendo x = 1 em (I), temos:

$y = 2 \cdot 3^1 = 6 \Rightarrow D(1, 6)$

Fazendo y = 2 em (II), temos:

$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow B(9, 2)$ e $C(9, 6)$

Portanto, temos a seguinte figura:



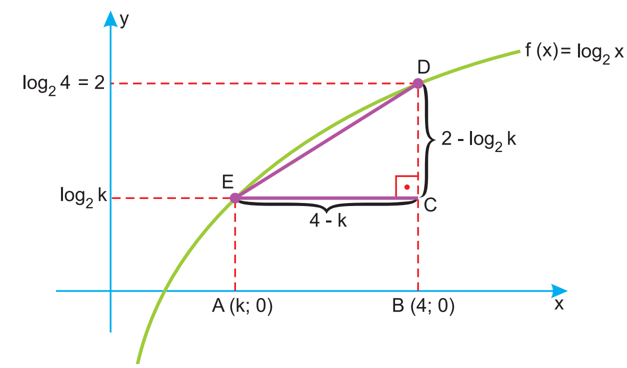
$(AC)^2 = 4^2 + 8^2$

$AC = \sqrt{16 + 64}$

$AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Resposta: D

16)



$A_{CDE} = 20\%$ de $A_{ABDE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(4 - k) \cdot (2 - \log_2 k)}{2} = \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{(\log_2 k + 2) \cdot (4 - k)}{2} \Leftrightarrow$

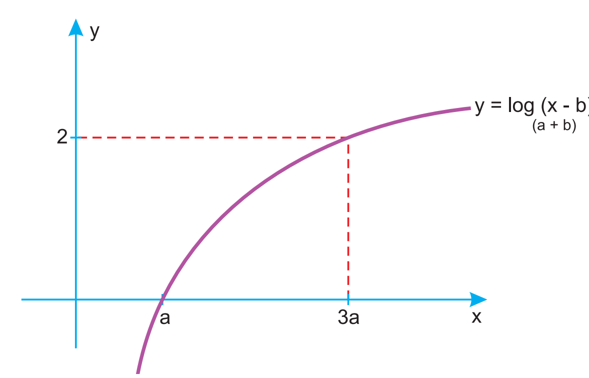
$\Leftrightarrow 2 - \log_2 k = \dfrac{1}{5} \cdot (\log_2 k + 2) \Leftrightarrow 5 \cdot (2 - \log_2 k) = \log_2 k + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 - 5 \cdot \log_2 k = \log_2 k + 2 \Leftrightarrow 6 \log_2 k = 8 \Leftrightarrow \log_2 k = \dfrac{8}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 k = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow k = 2^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{2^4} \Leftrightarrow k = 2\sqrt[3]{2}$

Resposta: C

17)



Para x = a, temos:

$y = \log_{(a + b)}(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b) = (a + b)^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - b = 1 \Leftrightarrow b = a - 1$

Para x = 3a, temos:

$y = \log_{(a + b)}(3a - b) = 2 \Leftrightarrow \log_{(a + a - 1)}[3a - (a - 1)] = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{(2a - 1)}(2a + 1) = 2 \Leftrightarrow 2a + 1 = (2a - 1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a + 1 = 4a^2 - 4a + 1 \Leftrightarrow 4a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow$

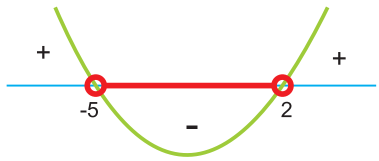
$\Leftrightarrow 2a \cdot (2a - 3) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0$ (não serve) ou $2a = 3$

Resposta: B

18) I) $\log_{10}x + \log_{10}(x+3) < 1 \Leftrightarrow \log_{10}x + \log_{10}(x+3) < \log_{10}10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10}[x \cdot (x+3)] < \log_{10}10 \Leftrightarrow x \cdot (x+3) < 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x < 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 2$

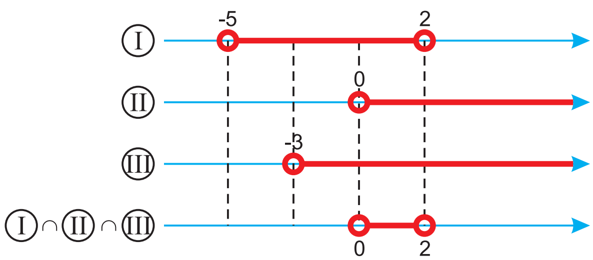


Verificando as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

II) $x > 0$

III) $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

Assim,



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

Resposta: C

19) $\log_{0,4}[\log_2(0,5)^{x-5}] \leqslant \log_{0,4}(x+2) \Leftrightarrow \log_2(0,5)^{x-5} \geqslant x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5) \cdot \log_2 0,5 \geqslant x + 2 \Leftrightarrow (x-5) \cdot \log_2 2^{-1} \geqslant x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5) \cdot (-1) \cdot \log_2 2 \geqslant x + 2 \Leftrightarrow -x + 5 \geqslant x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x \geqslant -3 \Leftrightarrow 2x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2}$

Pela condição de existência dos logaritmos, devemos ter:

$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant \dfrac{3}{2}\right\}$

Resposta: C

20) I) $\log_2(2x+5) - \log_2(3x-1) > 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x+5}{3x-1}\right) > \log_2 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{3x-1} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{3x-1} - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+5-(6x-2)}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x+7}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-4x+7) \,.\, (3x-1) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{4}$

II) Analisando a condição de existência dos logaritmos, temos:

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{5}{2} \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}$$

Portanto, $S = \left]\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{4}\right[$

Resposta: D

21) $1 \leqslant \log_{10}(x-1) \leqslant 2 \Leftrightarrow \log_{10}10 \leqslant \log_{10}(x-1) \leqslant \log_{10}10^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \leqslant x - 1 \leqslant 10^2 \Leftrightarrow 11 \leqslant x \leqslant 101 \Leftrightarrow$

Resposta: C

■ Módulo 7 – Módulo de um Número Real

1) $|x^2 - 6x + 5| < -5$ não tem solução, pois $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$

Resposta: C

2) A igualdade

$|x^2 - x - 2| = 2x + 2$, com $2x + 2 \geq 0$, é verificada para:

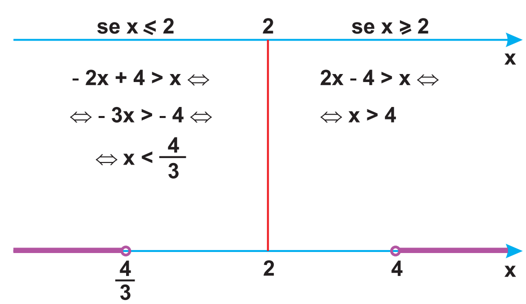
1º) $x^2 - x - 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -1$

2º) $-x^2 + x + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

Assim, o conjunto solução da equação é {– 1; 0; 4} e a soma dos valores de x é igual a 3.

Resposta: B

3)

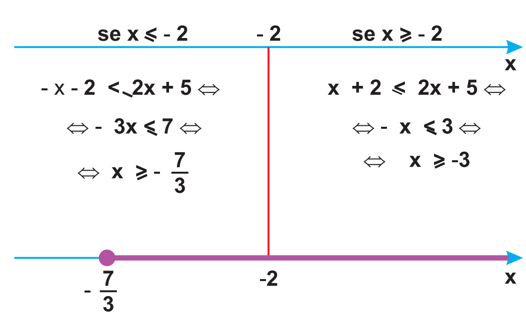


$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{4}{3} \text{ ou } x > 4\right\}$

Resposta: C

4) I) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

II) $|x + 2| \leqslant 2x + 5$

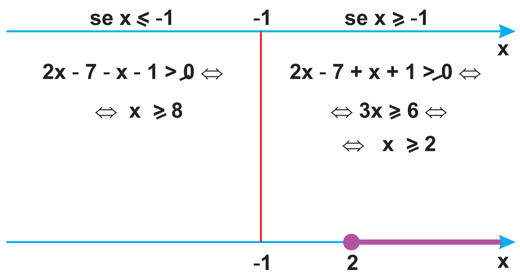


Assim, $|x + 2| \leqslant 2x + 5 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{7}{3}$

Resposta: C

5) I) $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

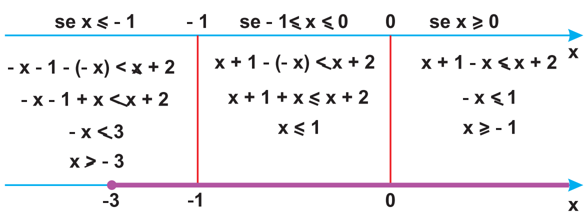
II) $2x - 7 + |x + 1| \geqslant 0$



Assim, $2x - 7 + |x + 1| \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$

Resposta: D

6)



$V = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geqslant -3\}$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$

7) I) $x \geqslant 0 \Rightarrow (1 + x)\,(1 - x) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$ e $x \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1.$

II) $x \leqslant 0 \Rightarrow (1 + x)\,(1 - (-1)) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + x)\,(1 + x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (1 + x)^2 \geqslant 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$

O conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$

Resposta: B

8) Lembrando que $\dfrac{|x|}{x} = 1$ se $x > 0$ e $\dfrac{|x|}{x} = -1$ se $x < 0$,

temos:

1) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = 1 + 1 - 1 = 1$

2) $a > 0$ e $b < 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = 1 + (-1) - (-1) = 1$

3) $a < 0$ e $b > 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = (-1) + (1) - (-1) = 1$

4) $a < 0$ e $b < 0 \Rightarrow \dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab} = (-1) + (-1) - (+1) = -3$

Então, sendo a e b dois números reais diferentes de zero, a expressão algébrica $\dfrac{|a|}{a} + \dfrac{|b|}{b} - \dfrac{|ab|}{ab}$ resulta 1 ou – 3.

Resposta: D

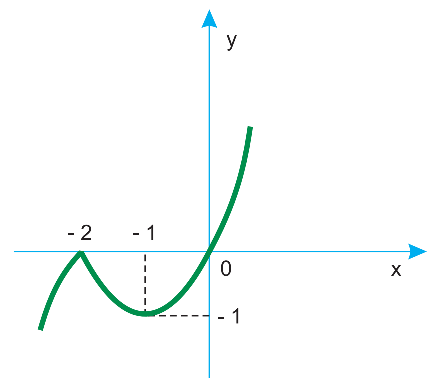
9) I) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

II) Se $x \geq -2 \Rightarrow f(x) = x \,.\, |x + 2| = x \,.\, (x + 2)$

III) Se $x \leq -2 \Rightarrow f(x) = x \,.\, |x + 2| = x \,.\, (-x - 2)$

IV) O gráfico da função definida por

$f(x) = x \,.\, |x + 2| = \begin{cases} x \,.\, (x + 2), \text{ para } x \geq -2 \\ x \,.\, (-x - 2), \text{ para } x \leq -2 \end{cases}$ é:



10) a) é falsa, pois se $x = 3$ e $y = -4$, tem-se $|x| < |y|$ e $x > y$

b) é verdadeira

c) é falsa, pois se $x = 3$ e $y = -4$, tem-se $|x + y| = |-1| = 1$ e $|x| + |y| = 3 + 4 = 7$

d) é falsa, pois $\big|-|x|\big| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

e) é falsa, pois se $x < 0$, então $|x| = -x$

Resposta: B

11) $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

Resposta: E

12) $|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$

Resposta: C

13) $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1$

Resposta: E

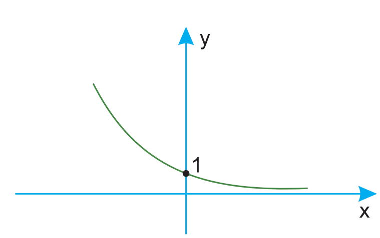
14) $|x^2 - 5x + 5| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 5x + 5 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x^2 - 5x + 5 \\ x^2 - 5x + 5 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

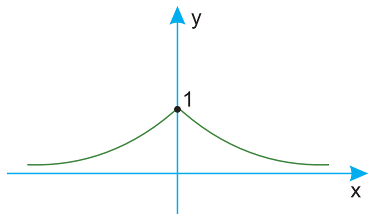
$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ ou } x > 3 \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4$

Resposta: B

15) I) O gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ é

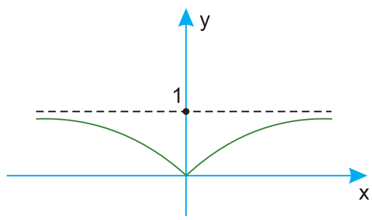


II) O gráfico da função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



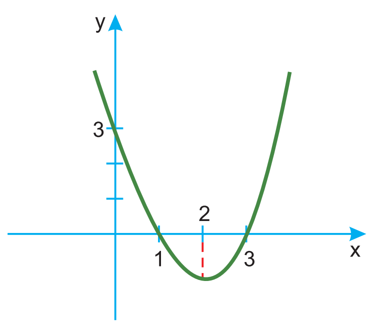
III) O gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = 1 - 2^{-|x|} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$ é

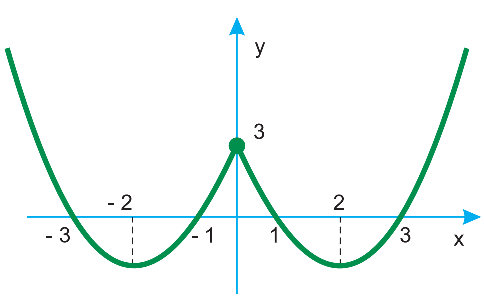


Resposta: C

16) I) O gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$ é



II) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 4|x| + 3 = |x|^2 - 4|x| + 3$ é



Resposta: B

17) I) $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$

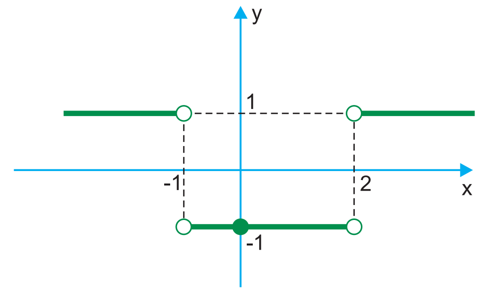
II) Se $x < -1$ ou $x > 2$, tem-se $x^2 - x - 2 > 0$ e

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = 1$$

III) Se $-1 < x < 2$, tem-se $x^2 - x - 2 < 0$ e

$$f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - x - 2} = \frac{-(x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} = -1$$

Assim, o gráfico da função f é:



■ Módulo 8 – Divisão em $\mathbb{N}$, Múltiplos e Divisores em $\mathbb{Z}$

1) $\begin{array}{c|c} 37 & b \\ \hline 2 & 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 37 = b \cdot 7 + 2 \\ 2 < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7b = 35 \\ b > 2 \end{cases} \Rightarrow b = 5$

Resposta: 5

2) $\begin{array}{c|c} 41 & x \\ \hline 6 & 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 41 = x \cdot 7 + 6 \\ 6 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 35 \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow$ não existe x

Resposta: não existe

3) $\begin{array}{c|c} 41 & x \\ \hline 1 & 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 41 = x \cdot 8 + 1 \\ 1 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 40 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x = 5$

Resposta: 5

4) I) $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 3 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \cdot 2 + 3 \\ 3 < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 3 \\ b > 3 \end{cases}$

II) $\begin{array}{c|c} a + 2 & b \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = b \cdot 3 \\ 0 < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = -2 \\ b > 0 \end{cases}$

III) $\begin{cases} a - 2b = 3 \\ a - 3b = -2 \\ b > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 3 \\ -a + 3b = 2 \\ b > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot b = 13 \cdot 5 = 65$

Resposta: 65

5) I) $\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 2 & 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \cdot 5 + 2 \\ 2 < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y = 2 \\ y > 2 \end{cases}$

II) $\begin{array}{c|c} x & y + 1 \\ \hline 4 & 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (y + 1) \cdot 4 + 4 \\ 4 < y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 8 \\ y > 3 \end{cases}$

III) $\begin{cases} x - 5y = 2 \\ x - 4y = 8 \\ y > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = -2 \\ x - 4y = 8 \\ y > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 32 + 6 = 38$

Resposta: 38

6) Sendo x o maior e y o menor dos números, tem-se:

I) $x + y = 224$

II) $\dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{14} = \dfrac{x + y}{18 + 14} = \dfrac{224}{32} = 7$

Assim, $\dfrac{x}{18} = 7 \Leftrightarrow x = 126$ e $\dfrac{y}{14} = 7 \Leftrightarrow y = 98$

Portanto, a soma do maior com a metade do menor é

$x + \dfrac{y}{2} = 126 + \dfrac{98}{2} = 126 + 49 = 175$

Resposta: D

7) I) $\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 24 & 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \,.\, 8 + 24 \\ 24 < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 8b = 24 \\ b > 24 \end{cases}$

II) $a + b + 8 + 24 = 344 \Leftrightarrow a + b = 312$

III) $\begin{cases} a - 8b = 24 \\ a + b = 312 \\ b > 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 8b = -24 \\ a + b = 312 \\ b > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 280 \\ b = 32 \end{cases}$

Portanto, a diferença entre o dividendo e o divisor é

$a - b = 280 - 32 = 248$

Resposta: D

8) Se a e b são dois números naturais tais que $a^2 - b^2 = 24$, então $(a - b) \,.\, (a + b) = 24$.

Dessa forma, podemos ter:

1) $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 24 \end{cases} \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$

2) $\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 7 \text{ e } b = 5 \Rightarrow (a + b)^2 = (7 + 5)^2 = 144$

3) $\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$

4) $\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 5 \text{ e } b = 1 \Rightarrow (a + b)^2 = (5 + 1)^2 = 36$

Resposta: B

9) Sendo *a* e *b* dois algarismos do sistema decimal de numeração, com $a \neq 0$, temos que

$(abab)_{10} = 1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b =$
$= 101\,(10a + b)$.

Portanto, números da forma $(abab)_{10}$ são divisíveis por 101.

10) I) Decompondo 1200 em fatores primos, tem-se que $1200 = 2^4 \,.\, 3^1 \,.\, 5^2$

II) O número de divisores de 1200 é dado por $n[D(1200)] = 2 \,.\, (4 + 1) \,.\, (1 + 1) \,.\, (2 + 1) = 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 3 = 60$

Resposta: 60

11) Como 31 é um número primo e observando que $31 = 31^1$, o número de divisores é dado por $n[D(31)] = 2 \,.\, (1 + 1) = 2 \,.\, 2 = 4$

Resposta: 4

12) I) $a = 2^n \,.\, 5$ e $b = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^n$, então,

$a \,.\, b = 2^n \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5^n = 2^{n+1} \,.\, 3^1 \,.\, 5^{n+1}$

II) Se ab possui 18 divisores naturais, então:

$(n + 1 + 1) \,.\, (1 + 1) \,.\, (n + 1 + 1) = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n + 2) \,.\, 2 \,.\, (n + 2) = 18 \Leftrightarrow (n + 2)^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow n + 2 = 3 \Leftrightarrow n = 1$, pois $n > 0$

Portanto, para $n = 1$, tem-se $a = 2^1 \,.\, 5 = 10$ e $b = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^1 = 30$

Resposta: a = 10 e b = 30

13) 1) $mdc(a,b) \,.\, mmc(a,b) = 190 = 2 \,.\, 5 \,.\, 19 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow mdc(a,b) = 1$ e $mmc(a,b) = 2 \,.\, 5 \,.\, 19$

2) $\begin{cases} a + b = 43 \\ a \,.\, b = 2 \,.\, 5 \,.\, 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 38 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 38 \\ b = 5 \end{cases}$

3) $|a - b| = 33$

Resposta: B

14) I) $mdc(360, 300) = a$

II) $mmc(360, 300) = b$

III) $a \,.\, b = mdc(360, 300) \,.\, mmc(360, 300) = 360 \,.\, 300 =$
$= 2^3 \,.\, 3^2 \,.\, 5 \,.\, 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5^2 = 2^5 \,.\, 3^3 \,.\, 5^3$

Resposta: C

15) I) $mdc(x; y) = 2$

II) $mmc(x; y) = 78 = 2 \,.\, 3 \,.\, 13$

III) $mdc(x; y) \,.\, mmc(x; y) = x \,.\, y = 2 \,.\, 78 = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 13$

IV) Como x e y são compostos por dois fatores primos e $x < y$, conclui-se que $x = 2 \,.\, 3 = 6$ e $y = 2 \,.\, 13 = 26$ e, portanto, $x^2 - y = 6^2 - 26 = 36 - 26 = 10$

Resposta: A

16) $mmc(30,48,72) = 2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5 = 720$, pois:

$$\begin{array}{r|l} 30,48,72 & 2 \\ 15,24,36 & 2 \\ 15,12,18 & 2 \\ 15,\ 6,\ 9 & 2 \\ 15,\ 3,\ 9 & 3 \\ 5,\ 1,\ 3 & 3 \\ 5,\ 1,\ 1 & 5 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Resposta: E

17) O lado de cada lajota quadrada, em centímetros, deve ser divisor natural de 200 e 500 e, portanto, divisor do mdc(200, 500) = 100.

Os divisores naturais de 100 são 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

Resposta: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

18) O número de páginas de cada fascículo deve ser divisor natural de 256 e 160 e, portanto, divisor do mdc(256, 160) = 32, pois:

	1	1	1	2
256	160	96	64	32
96	64	32	0	

Os divisores naturais de 32 são 1, 2, 4, 8, 16 e 32.

Resposta: A

19) I) $\begin{array}{r|l} n & 3 \\ \hline 2 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} n + 1 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$

II) $\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline 3 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} n + 1 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$

III) $\begin{array}{c|l} n & 5 \\ \hline 4 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c|l} n+1 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$

IV) n + 1 é múltiplo comum de 3, 4 e 5, então, o menor valor de n é tal que n + 1 = mmc(3; 4; 5) = 60, portanto, $n + 1 = 60 \Leftrightarrow n = 59$

Resposta: B

20) A senha de 4 algarismos, todos diferentes de zero, é do tipo $\boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{c}\ \boxed{5}$. De acordo com o enunciado, devemos ter:

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ a + b + c + 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Resposta: A

21) I) $0{,}555... = \dfrac{5}{9}$

II) $x = 512^{0{,}555...} = 512^{\frac{5}{9}} = (2^9)^{\frac{5}{9}} = 2^5 = 32$

Resposta: C

22) $N = 121{,}434343... = 121 + 0{,}434343... = 121 + \dfrac{43}{99} =$

$= \dfrac{121 \cdot 99 + 43}{99} = \dfrac{11979 + 43}{99} = \dfrac{12022}{99}$

Resposta: $\dfrac{12022}{99}$

23) $0{,}1222... = \dfrac{1{,}222...}{10} = \dfrac{1 + 0{,}222...}{10} = \dfrac{1 + \frac{2}{9}}{10} =$

$= \dfrac{\frac{11}{9}}{10} = \dfrac{11}{90} = \dfrac{a}{b}$ com a e b primos entre si, então, a = 11, b = 90 e b – a = 79

Resposta: E

24) Para $a = 10^{-49}$ e $b = 2 \cdot 10^{-50}$, tem-se:

$b = 2 \cdot 10^{-50} = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-49} = 2 \cdot \dfrac{1}{10} \cdot a = \dfrac{1}{5} \cdot a$

Assim, $b = \dfrac{1}{5} \cdot a \Leftrightarrow a = 5b$

Resposta: E

25) $\begin{cases} a + b = 10 \\ 10b + a = 10a + b + 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 10 \\ -9a + 9b = 54 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 10 \\ -a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}$

Assim, o número de 2 algarismos (ab) é 28.

Resposta: B

26) Considerando o número de 3 algarismos (abc), tem-se:

$$\begin{cases} a + b + c = 9 \\ b - c = 6 \\ \dfrac{b}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 9 \\ c = b - 6 \\ a = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{2} + b + b - 6 = 9 \\ c = b - 6 \\ a = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 4b - 12 = 18 \\ c = b - 6 \\ a = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

Assim, o número de 3 algarismos (abc) é 360.

Resposta: 360

27) Considerando o número de 2 algarismos (ab), tem-se:

$\begin{cases} b = 2a \\ 10b + a = 10a + b = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ -9a + 9b = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ -a + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$

Assim, os números são 36 e 63. A diferença entre os dois é $\dfrac{3}{4}$ do primeiro, pois 63 – 36 = 27 e $\dfrac{3}{4} \cdot 36 = 27$

Resposta: A

28) Considerando o número de 4 algarismos N = (mcdu), tem-se:

$$\begin{cases} c = d + m \\ d + u = c + 3m \\ c + m = 8 \\ u + d + m = 11 \end{cases}$$

Substituindo-se a 2ª equação na 4ª, tem-se:

$$\begin{cases} c = d + m \\ d + u = c + 3m \\ c + m = 8 \\ c + 4m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = d + m \\ d + u = c + 3m \\ c = 7 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ u = 4 \\ c = 7 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow N = 1764$$

Resposta: D

FRENTE 2 – ÁLGEBRA

■ Módulo 5 – Propriedades da Progressão Aritmética e Soma dos Termos

1) $3r - 1 = \dfrac{r - 1 + r - 3}{2} \Leftrightarrow 6r - 2 = 2r - 4 \Leftrightarrow 4r = -2 \Leftrightarrow r = -\dfrac{1}{2}$

Resposta: B

2) I) Se a for a idade do filho do meio e r for a razão, podemos representar essas idades por a – 2r; a – r; a; a + r; a + 2r

II) Pelo enunciado:

$$\begin{cases} (a - 2r) + (a - r) + a + (a + r) + (a + 2r) = 100 \\ (a + 2r) - (a - 2r) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \\ r = 3 \end{cases}$$

III) As idades são: 14; 17; 20; 23; 26.

IV) A idade do 2º filho é 23.

Resposta: B

3) Sendo x a quantia emprestada por cada irmão, em milhares de reais, tem-se:

I) (15 – x; 4 + 2x; 17 – x) é uma P.A., então

$4 + 2x = \dfrac{15 - x + 17 - x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 + 4x = 32 - 2x \Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow x = 4$

II) O valor emprestado, acrescido de 20% é dado por
$2x \,.\, 1{,}20 = 2 \,.\, 4 \,.\, 1{,}20 = 9{,}6$

III) 9,6 milhares de reais = 9 600 reais

Resposta: E

4) Na P.A., $a_9 + a_{n-8} = a_1 + a_n$, pois $9 + n - 8 = 1 + n$, assim:

$a_9 + a_{n-8} = (x - 1)^3 + (x + 1)^3 =$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + 6x$

Resposta: A

5) $a_6 + a_{n-5} = a_1 + a_n$, pois $6 + n - 5 = 1 + n$.

Portanto, $a_6 + a_{n-5} = a_1 + a_n = 120$

Resposta: A

6) Os *n* primeiros números ímpares (1, 3, 5, ..., 2n – 1) formam uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 1$, milésimo termo $a_{1000} = 2 \,.\, 1000 - 1 = 1999$, e cuja soma é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \,.\, n}{2} \Leftrightarrow S_{1000} = \frac{(1 + 1999) \,.\, 1000}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow S_{1000} = 1.000.000$

Resposta: A

7) Observando que $100 \,\underline{|\,7}$ e $250 \,\underline{|\,7}$ concluímos que o
$\quad 2 \;\; 14 \qquad 5 \;\; 35$

primeiro múltiplo de 7 após o 100 é $a_1 = 100 + (7 - 2) = 105$ e o múltiplo de 7 que antecede o 250 é $a_n = 250 - 5 = 245$.

A soma pedida é, portanto,

$$S_n = 105 + 112 + 119 + ... + 245 = \frac{(105 + 245)}{2} \,.\, n$$

Como $a_n = a_1 + (n - 1) \,.\, r$, temos que

$245 = 105 + (n - 1) \,.\, 7 \Leftrightarrow n - 1 = 20 \Leftrightarrow n = 21$

$$\text{Então, } S_n = \frac{(105 + 245)}{2} \,.\, 20 = 175 \,.\, 21 = 3\,675$$

Resposta: E

8) $S_{11} = \dfrac{(a_1 + a_{11})}{2} \,.\, 11 = 1474 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(a_1 + a_{11})}{2} = 134 \Leftrightarrow \frac{2a_6}{2} = 134 \Leftrightarrow a_6 = 134$$

Resposta: C

9) Se T_n representa o enésimo número triangular, então

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2$

$T_3 = 1 + 2 + 3$

$\vdots$

$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

$$\text{Portanto, } T_{100} = 1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{(1 + 100)}{2} \,.\, 100 = 5050$$

Resposta: A

10) Os números naturais n, $100 \le n \le 999$, que, divididos por 9, deixam resto 2, são os termos da progressão aritmética: (101; 110; 119; ...; 992), de razão r = 9

Fazendo $a_1 = 101$ e $a_p = 992$, tem-se:

$a_p = a_1 + (p - 1) \,.\, r \Rightarrow 992 = 101 + (p - 1) \,.\, 9 \Leftrightarrow p = 100$

$$\text{e } S_p = S_{100} = \frac{(101 + 992) \,.\, 100}{2} = 54\,650$$

Resposta: D

11) I) Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{25})$ forem os 25 primeiros termos de uma progressão aritmética, de razão 2, que representam os preços dos DVDs, então

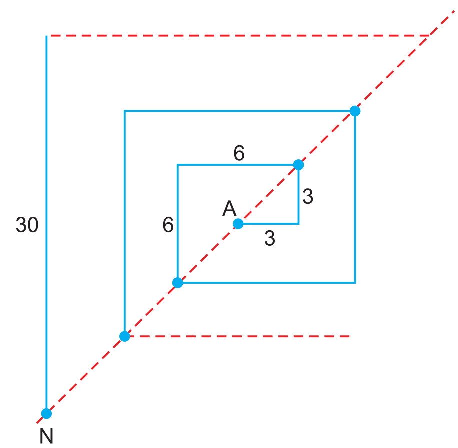
$$\begin{cases} a_{25} = a_1 + (25 - 1) \,.\, 2 \\ a_{25} = 7a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{25} = 56 \end{cases}$$

II) A soma do 25 primeiros termos da progressão aritmética (8, 10, 12, ..., 56, ...) é

$$S_{25} = \frac{8 + 56}{2} \,.\, 25 = 800$$

Resposta: E

12)



Observe na figura que o ponto A de início da busca é o centro de um quadrado, onde um dos vértices é o ponto N, local do naufrágio.

Se $AN = 15\sqrt{2}$ milhas, o último trecho percorrido pela equipe antes de atingir os naúfragos é lado de um quadrado de 30 milhas de lado.

Assim, a equipe andou

$3 + 3 + 6 + 6 + 9 + 9 + ... + 30 + 30 = 2 \,.\, (3 + 6 + 9 + ... + 30) =$

$$= 2 \,.\, \frac{(3 + 30) \,.\, 10}{2} = 330 \text{ milhas e levou } \frac{330}{30} = 11 \text{ horas.}$$

Resposta: B

13) $$\begin{cases} S_1 = a_1 = 2 \,.\, 1^2 + 3 \,.\, 1 = 5 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 2 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2 = 14 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_1 + a_2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 9 \end{cases} \text{ e,}$$

consequentemente, $r = a_2 - a_1 = 4$.

Resposta: D

14) a) $a_1 + a_9 = a_1 + a_1 + 8r = a_1 + r + a_1 + 7r = a_2 + a_8$

b) $S_9 = 17\,874 \Leftrightarrow \dfrac{(a_1 + a_9) \,.\, 9}{2} = 17\,874$ e como

$a_1 + a_9 = a_5 + a_5 = 2 \,.\, a_5$, tem-se:

$\dfrac{2 \,.\, a_5 \,.\, 9}{2} = 17\,874 \Leftrightarrow 9 \,.\, a_5 = 17\,874 \Leftrightarrow a_5 = 1\,986$

Respostas: a) demonstração
b) 1986

■ Módulo 6 – Progressão Geométrica – Definição e Propriedades

1) Por exemplo, $q = 2$ e $a_1 = -1$

$(a_n) = (-1; -2; -4; -8; ...)$ estritamente decrescente.

Resposta: A

2) Considerando a P.G. (110 000; 121 000; ...), a razão é

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{121\,000}{110\,000} = 1{,}1$ e o terceiro termo é

$a_3 = a_2 \,.\, q = 121\,000 \,.\, 1{,}1 = 133\,100$

Resposta: D

3) A sequência em questão é uma progressão geométrica de 1º termo $a_1 = 1$ e razão $q = 2$.

Como $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$, o 21º termo é

$a_{21} = a_1 \,.\, q^{20} = 1 \,.\, 2^{20} = 2^{10} \,.\, 2^{10} = 1024 \,.\, 1024 = 1048576$ e $1000000 < 1048576 < 1050000$.

Resposta: E

4) Na progressão geométrica dada tem-se $a_1 = 1$ e

$q = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e, utilizando o termo geral $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$, resulta

$a_{11} = a_1 \,.\, q^{10} = 1 \,.\, \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = \dfrac{2^5}{2^{10}} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

Resposta: $\dfrac{1}{32}$

5) Em 1902, a pintura valia 100 dólares.

Em 1912, a pintura valia (2 . 100) dólares.

Em 1922, a pintura valia (2^2 . 100) dólares.

⋮

Em 2002, a pintura valia

(2^{10} . 100) dólares = 102 400 dólares.

Resposta: D

6) I) 3 horas = 180 min = 9 . 20 min

II) Após 3 horas, o número de bactérias da espécie que divide-se em duas a cada 20 minutos, é o 9º termo da P.G. (1, 2, 4, ...), assim, $a_9 = a_1 \,.\, q^8 = 1 \,.\, 2^8 = 2^8$

III) 3 horas = 180 min = 6 . 30 min

IV) Após 3 horas, o número de bactérias da espécie que divide-se em duas a cada 30 minutos, é o 6º termo da P.G. (1, 2, 4, ...), assim, $b_6 = b_1 \,.\, q^5 = 1 \,.\, 2^5 = 2^5$

V) A relação pedida é $\dfrac{a_9}{b_6} = \dfrac{2^8}{2^5} = 2^3 = 8$

Resposta: A

7) Na P.G.(1; a; ...), tem-se $a_1 = 1$ e $q = a$. Se $a_9 = 256$, então:

$a_9 = a_1 \,.\, q^8 \Rightarrow 256 = 1 \,.\, a^8 \Leftrightarrow 2^8 = a^8 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt[8]{2^8} = \pm 2$

Resposta: C

8) A cada ano que passa, o valor do carro passa a ser 70% do valor do ano anterior (100% – 30% =70%).

Se v é o valor do 1º ano, no oitavo ano, o carro estará valendo

$a_8 = a_1 \,.\, q^7 = v \,.\, (0{,}7)^7 = (0{,}7)^7 \,.\, v$

Resposta: A

9) Sendo $a_1 = \dfrac{1}{9}$, $q = 3$, $a_n = 729$ e $a_n = a_1 \,.\, a^{n-1}$, resulta

$729 = \dfrac{1}{9} \,.\, 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^6 \,.\, 3^2 = 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^8 = 3^{n-1} \Leftrightarrow n - 1 = 8 \Leftrightarrow n = 9$

Resposta: B

10) Se $(\sqrt[3]{3}; \sqrt{3}; x)$ é uma P.G., então:

$(\sqrt{3})^2 = \sqrt[3]{3} \,.\, x \Leftrightarrow 3 = \sqrt[3]{3} \,.\, x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} \,.\, \dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} =$

$= \dfrac{3 \,.\, \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{3 \,.\, \sqrt[3]{9}}{3} = \sqrt[3]{9}$

Resposta: D

11) Se $4x$, $2x + 1$, $x - 1$ estão em P.G., nesta ordem, então $(2x + 1)^2 = 4x\,(x - 1) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 1 = -4x \Leftrightarrow 8x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{8}$.

Resposta: A

12) Se (log a; log b; log c) é uma P.A., então:

$\log b = \dfrac{\log a + \log c}{2} \Leftrightarrow 2 \,.\, \log b = \log a + \log c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log b^2 = \log(a \,.\, c) \Leftrightarrow b^2 = a \,.\, c \Rightarrow (a; b; c)$ é uma P.G.

Resposta: B

13) Se $(1 + x; 3 + x; 6 + x)$ é uma P.G., então:

$(3 + x)^2 = (1 + x) \,.\, (6 + x) \Leftrightarrow 9 + 6x + x^2 = 6 + x + 6x + x^2 \Leftrightarrow x = 3$

Assim, para $x = 3$, tem-se a P.G. (4; 6; 9), cuja razão é

$q = \dfrac{6}{4} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

Resposta: C

14) I) Se $\left(\frac{1}{3}; a; 27\right)$ é uma P.G,. com a > 0, tem-se:

$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Leftrightarrow 27 = \frac{1}{3} \cdot q^2 \Leftrightarrow q^2 = 81 \Rightarrow q = 9$, pois a > 0

II) Se (x; y; z) é um P.A. com x + y + z = 15 e razão r = q = 9, tem-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x = y - 9 \\ z = y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 + y + y + 3 = 15 \\ x = y - 9 \\ z = y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 15 \\ x = y - 9 \\ z = y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -4 \\ z = 14 \end{cases}$$

Resposta: A

15) Na P.G.(2; 6; 18; …), temos $a_1 = 2$ e q = 3. Então,

$a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 2 \cdot 3^{20}$

O produto dos 21 primeiros termos da P.G. é

$|P_{21}| = \sqrt{(a_1 \cdot a_{21})^{21}} = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3^{20})^{21}} = \sqrt{2^{42} \cdot 3^{420}} =$

$= 2^{21} \cdot 3^{210}$ e todos os termos são positivos.

Resposta: $P_{21} = 2^{21} \cdot 3^{210}$

16) I) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \sqrt{2}^{\,n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}$

II) $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = 2^{39} \Rightarrow \sqrt{\left(2^{\frac{n-1}{2}}\right)^n} = 2^{39} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{n^2-n}{4}} = 2^{39} \Leftrightarrow \frac{n^2 - n}{4} = 39 \Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 13$, pois n > 0

Resposta: B

■ Módulo 7 – Produto e Soma da Progressão Geométrica e Séries Geométricas

1) Na P.G. (1; 2; 4; 8; 16; …), sendo $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, tem-se:

$S_{20} = \frac{a_1 \cdot (q^{20} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{20} - 1 = (2^4)^5 - 1 = 16^5 - 1$

Resposta: A

2) I) P.G.(1; 3; 9; …) q = 3

II) $S_7 = \frac{1 \cdot (1 - 3^7)}{1 - 3} = \frac{2\,186}{2} = 1\,093$

Resposta: E

3) A quantidade de área desmatada a cada ano, em km^2, são os termos da progressão geométrica (3; 6; 12; 24; …).

A área total desmatada nos n anos em que ocorreram desmatamentos, em km^2, é a soma dos n primeiros termos dessa progressão.

Desta forma:

$S_n = \frac{a_1 [q^n - 1]}{q - 1} = \frac{3 \cdot [2^n - 1]}{2 - 1} = 381 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n - 1 = 127 \Leftrightarrow 2^n = 128 = 2^7 \Leftrightarrow n = 7$

Resposta: n = 7

4) O número de gotas que vazaram a cada hora são os termos da progressão geométrica (1; 2; 4; 8; …)

Durante as 24 horas do dia vazaram

$S_{24} = \frac{1 \cdot (2^{24} - 1)}{2 - 1} \simeq 2^{24}$ gotas, correspondente a

$\frac{2^{24}}{2^{14}} = 2^{10}$ litros, ou seja, 1024 litros.

Resposta: A

5) $\begin{cases} S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \\ a_1 = 1 \\ q = 3 \\ S_n = 3280 \end{cases} \Rightarrow 3280 = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^n - 1 = 6560 \Leftrightarrow 3^n = 6561 \Leftrightarrow 3^n = 3^8 \Leftrightarrow n = 8$

Resposta: B

6) I) $\begin{cases} a_3 = 40 \\ a_6 = -320 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 40 \\ a_1 \cdot q^5 = -320 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{a_1 q^2}{a_1 q^5} = \frac{40}{-320} \Leftrightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{-8} \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$

II) $a_1 \cdot q^2 = 40 \Rightarrow a_1 \cdot (-2)^2 = 40 \Leftrightarrow a_1 = 10$

III) $S_8 = \frac{10 \cdot [(-2)^8 - 1]}{-2 - 1} = \frac{2550}{-3} = -850$

Resposta: B

7) Sendo $a_1 = 2$, $a_n = 432$ e $S_n = 518$, tem-se:

I) $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} =$

$= \frac{a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 518 = \frac{432q - 2}{q - 1} \Leftrightarrow 518q - 518 = 432q - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 86q = 516 \Leftrightarrow q = 6$

II) $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1} \Rightarrow 432 = 2 \,.\, 6^{n-1} \Leftrightarrow 216 = 6^{n-1} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow 6^3 = 6^{n-1} \Leftrightarrow 3 = n - 1 \Leftrightarrow n = 4$

III) Para $q = 6$ e $n = 4$, tem-se $q > n$

Resposta: C

8) Para $x_0 = 1$ e $x_n = a \,.\, x_{n-1}$, tem-se:
$x_1 = a \,.\, x_0 = a \,.\, 1 = a$
$x_2 = a \,.\, x_1 = a \,.\, a = a^2$
$x_3 = a \,.\, x_2 = a \,.\, a^2 = a^3$
Assim, a sequência $(x_1; x_2; x_3; \ldots) = (a; a^2; a^3; \ldots)$ é uma P.G. de primeiro termo $x_1 = a$ e razão $q = a$

a) Quando $a = 2$, tem-se a P.G. $(2; 2^2; 2^3; \ldots)$, assim,
$x_{11} = x_1 \,.\, q^{10} = a \,.\, a^{10} = a^{11} = 2^{11} = 2048$

b) Quando $a = 3$, tem-se a P.G. $(3; 3^2; 3^3; \ldots)$, assim,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = S_8 = \frac{3 \,.\, (3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \,.\, (6561 - 1)}{2} =$$

$$= \frac{3 \,.\, 6560}{2} = 9840$$

Resposta: a) $x_{11} = 2048$
b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 9840$

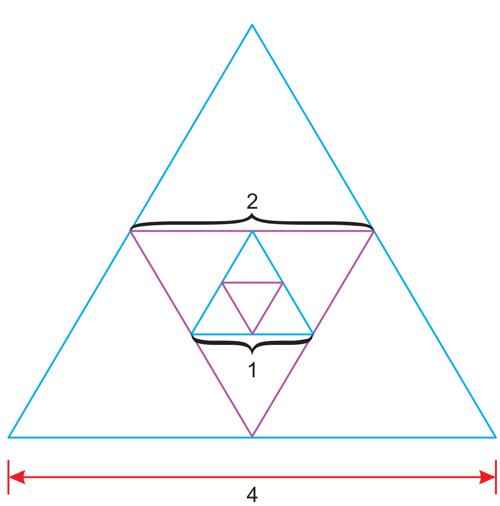
9) I) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

II) Para poder fazer o empilhamento indefinidamente, $h \geq \dfrac{3}{2}$.

Portanto, o menor valor é $\dfrac{3}{2}$.

Resposta: E

10) Os triângulos equiláteros construídos de acordo com o enunciado terão as medidas dos lados constituindo uma progressão geométrica de primeiro termo 4 cm e razão $\dfrac{1}{2}$, isto é: (4, 2, 1, ...).



A soma S dos perímetros da infinidade de triângulos construídos, em centímetros, é dada por:

$$S = 3 \,.\, 4 + 3 \,.\, 2 + 3 \,.\, 1 + 3 \,.\, \frac{1}{2} + \ldots\ldots$$

$$S = 3 \,.\, (4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots) = 3 \,.\, \frac{4}{1 - \dfrac{1}{2}} = \frac{12}{\dfrac{1}{2}} = 24$$

Resposta: D

11) A soma das áreas dos infinitos círculos é

$S = \pi \,.\, 3^2 + \pi \,.\, \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \pi \,.\, \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \ldots$, que é a soma dos infinitos termos da P.G. em que $a_1 = 9\pi$ e $q = \dfrac{1}{4}$.

Logo, $S = \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{9\pi}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{9\pi}{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{36\pi}{3} = 12\pi$

Resposta: C

12) I) $S = \dfrac{a_1}{1 - q}$, em que $a_1 = \dfrac{2a}{3}$ e $q = \dfrac{1}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{\dfrac{2a}{3}}{1 - \dfrac{1}{6}} = \frac{4a}{5}$$

II) $\log_2 S = 2 \Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{4a}{5}\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{4a}{5} = 4 \Leftrightarrow a = 5$

Resposta: E

13) I) $S = \dfrac{a_1}{1 - q}$, em que $S = \dfrac{512}{3}$ e

$a_1 = 128 \Rightarrow \dfrac{512}{3} = \dfrac{128}{1 - q} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 384 = 512 - 512q \Leftrightarrow 512q = 128 \Leftrightarrow q = \dfrac{128}{512} \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{4}$

II) O quinto termo dessa progressão é

$a_5 = a_1 \,.\, q^4 = 128 \,.\, \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = 128 \,.\, \dfrac{1}{256} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: B

14) $x + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{x}{27} + \ldots = 60 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1 - \dfrac{1}{3}} = 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\dfrac{2}{3}} = 60 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} \,.\, 60 \Leftrightarrow x = 40$

Resposta: B

15) $x^2 - x - \frac{x}{3} - \frac{x}{9} - \frac{x}{27} - \ldots = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - \left(x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{x}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$

O conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Resposta: A

■ Módulo 8 – Matrizes – Definição e Operações

1) Se a matriz A é de ordem 2x3 e $a_{ij} = i \,.\, j$, então:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Resposta: C

2) A matriz de ordem 2x3 com $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j, \text{ se } i \neq j \\ i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$, é:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 & 2.1 - 2 & 2.1 - 3 \\ 2.2 - 1 & 2 + 2 & 2.2 - 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Resposta: D

3) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

Resposta: A

4) I) $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C \Leftrightarrow 3X - 3A = 2B + 2X + 6C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = 3A + 2B + 6C$

II) Para as matrizes A, B e C dadas no enunciado, tem-se:

$X = 3 \,.\, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 2 \,.\, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \,.\, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & -6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix}$

Resposta: B

5) $2B - \frac{1}{2}A = 2 \,.\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Resposta: C

6) I) $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

II) $A - B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Resposta: B

7) $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \\ 1 + y = 2 \\ 1 + 0 = z \\ 2 - 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

Resposta: A

8) Lembrando que o produto de matrizes de ordens n x m e p x q existe se m = p e resulta numa nova matriz de ordem n x q. Pode-se observar que:

$A_{n \times m} \;.\; B_{p \times q} = C_{n \times q}$

iguais

resultado

I) Verdadeira, pois $A_{3 \times 2} \;.\; B_{2 \times 1} = C_{3 \times 1}$

=

3 x 1

II) Falso, pois $A_{5 \times 4} \;.\; B_{5 \times 2}$ não existe

$\neq$

III) Verdadeira, pois $A_{2 \times 3} \;.\; B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$

=

2 x 2

Resposta: B

9) Se A é uma matriz 3 x 4 e B uma matriz n x m, tem-se:

I) Existe A . B se, e somente se, n = 4

II) Existe B . A se, e somente se, m = 3

Resposta: C

10) $(4 \quad 1 \quad 3) \,.\, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (4 \,.\, 1 + 1 \,.\, 2 + 3 \,.\, 5) = (21)$

Resposta: C

11) I) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

II) $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

III) $AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Resposta: B

12) I) Se A é uma matriz 3 x 3 e $a_{ij} = (-2)^j$, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} . & . & . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ -2 & 4 & -8 \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

II) Se B é uma matriz 3 x 3 e $b_{ij} = (-1)^i$, tem-se:

$$B = \begin{pmatrix} . & . & b_{13} \\ . & . & b_{23} \\ . & . & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & -1 \\ . & . & 1 \\ . & . & -1 \end{pmatrix}$$

III) O elemento c_{23} da matriz C = A . B é dado por:

$c_{23} = a_{21} . b_{13} + a_{22} . b_{23} + a_{23} . b_{33} = (-2) . (-1) + 4 . 1 + (-8) . (-1) =$
$= 2 + 4 + 8 = 14$

Resposta: A

13) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $A.B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 21 \end{pmatrix}$, devemos ter

$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 4 \\ 3a + 5d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Portanto, a soma dos elementos da primeira coluna da matriz B é a + d = 3.

Resposta: C

14) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tem-se:

I) $A^2 = A . A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$

II) $2 . A = 2 . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

III) $11 . I = 11 . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

IV) $A^2 + 2 . A - 11 . I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resposta: C

15) I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

II) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y - 1 \\ x - y + 3 \end{pmatrix}$

III) $\begin{pmatrix} y - 1 \\ x - y + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Logo, x + y = – 1

Resposta: C

FRENTE 3 – TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ANALÍTICA

■ Módulo 5 – Funções Trigonométricas de um Ângulo Agudo

1) $C = 2 . \pi . R = 2 . \pi . 5\text{ cm} = 10 . \pi\text{ cm}$

Resposta: 10 . π cm

2) $\alpha = \dfrac{\text{comp }(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow 1{,}2 = \dfrac{12\text{ cm}}{r} \Leftrightarrow r = \dfrac{12\text{ cm}}{1{,}2} = 10\text{ cm}$

Resposta: 10 cm

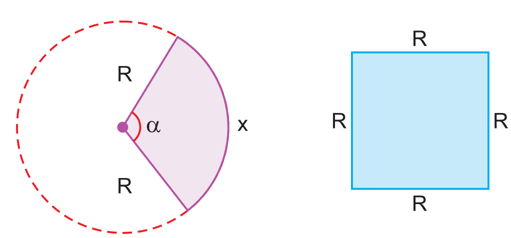
3) I) $\alpha = 30° = \dfrac{30° . \pi\text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{6}\text{ rad}$

II) $\alpha = \dfrac{\text{comp }(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\text{comp }(\widehat{AB})}{3\text{ cm}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{comp }(\widehat{AB}) = \dfrac{\pi . 3\text{ cm}}{6} = \dfrac{3{,}14\text{ cm}}{2} = 1{,}57\text{ cm}$

Resposta: 1,57 cm

4)



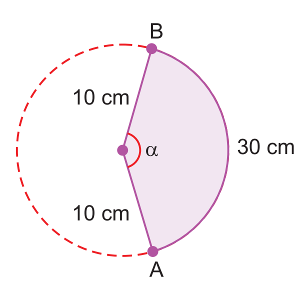
I) Se o perímetro do setor circular é igual ao perímetro do quadrado, então, x + R + R = 4R ⇔ x = 2R

II) Pela definição de medida de arco, em radianos, temos:

$\alpha = \dfrac{x}{R} = \dfrac{2R}{R} = 2$

Resposta: B

5)



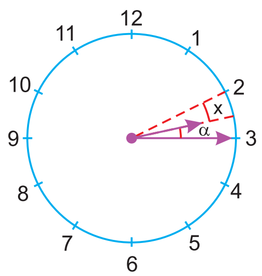
$\alpha = \dfrac{\text{comp }(\widehat{AB})}{r} = \dfrac{30\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 3$

Resposta: 3 rad

6) $12° = \dfrac{12° \,.\, \pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{\pi}{15} \text{ rad} \cong \dfrac{3{,}14}{15} \text{ rad} \cong 0{,}209 \text{ rad}$

Resposta: 0,209 rad

7)



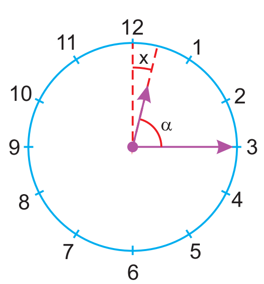
I) Para o ponteiro pequeno, temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{tempo} & & \textit{ângulo} \\ 60 \text{ min} & \text{———} & 30° \\ 15 \text{ min} & \text{———} & x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \frac{15 \,.\, 30°}{60} = 7{,}5° = 7°30'$$

II) $x + \alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 30° - x = 30° - 7°30' = 22°30'$

Resposta: 22°30'

8)



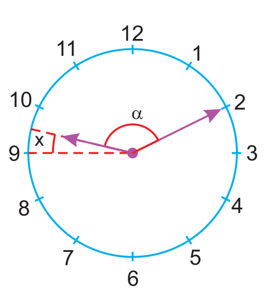
I) Para o ponteiro pequeno, temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{tempo} & & \textit{ângulo} \\ 60 \text{ min} & \text{———} & 30° \\ 15 \text{ min} & \text{———} & x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \frac{15 \,.\, 30°}{60} = 7{,}5° = 7°30'$$

II) $x + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - x = 90° - 7°30' = 82°30'$

Resposta: 82°30'

9)



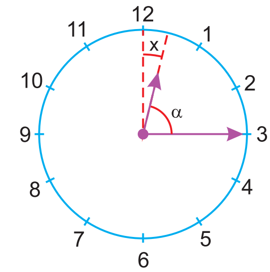
I) Para o ponteiro pequeno, temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{tempo} & & \textit{ângulo} \\ 60 \text{ min} & \text{———} & 30° \\ 10 \text{ min} & \text{———} & x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \frac{10 \,.\, 30°}{60} = 5°$$

II) $x + \alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 150° - x = 150° - 5° = 145°$

Resposta: 145°

10)



I) Para o ponteiro pequeno, temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{tempo} & & \textit{ângulo} \\ 60 \text{ min} & \text{———} & 30° \\ 15 \text{ min} & \text{———} & x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \frac{15 \,.\, 30°}{60} = 7{,}5° = 7°30'$$

II) $x + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - x = 90° - 7°30' = 82°30'$

Resposta: E

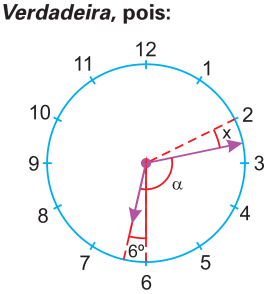
11) I) *Verdadeira*, pois para o ponteiro das horas, temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{tempo} & & \textit{ângulo} \\ 60 \text{ min} & \text{———} & 30° \\ t \text{ min} & \text{———} & x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \alpha = \frac{t \,.\, 30°}{60} = \frac{t}{2} \text{ graus}$$

II) *Verdadeira*, pois para t = 12, temos:

$\alpha = \dfrac{12}{2} \text{ graus} = 6°$

III) *Verdadeira*, pois:



Para o ponteiro pequeno, temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{tempo} & & \textit{ângulo} \\ 60 \text{ min} & \text{———} & 360° \\ 2 \text{ min} & \text{———} & x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow x = \frac{2 \,.\, 360°}{60} = 12°$$

Portanto, $x + \alpha = 120° + 6° \Rightarrow 12° + \alpha = 126° \Leftrightarrow \alpha = 114°$

IV) Verdadeira, pois em 12 minutos o ponteiro dos minutos percorre $\dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$ da volta, assim, a extremidade descreve um arco de $\dfrac{1}{5} \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, R = \dfrac{1}{5} \,.\, 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 10 \text{ cm} = 12{,}56 \text{ cm}$, pois R = 10 cm é a medida do ponteiro e corresponde ao raio da circunferência.

Resposta: E

12) a) $1000° \div 360°$: $1000° - 720° = 280°$, quociente 2 $\Rightarrow$ $1000° = 2 \cdot 360° + 280°$, portanto, a 1ª determinação positiva é 280°.

b) $-1210° \div (-360°)$: $-1210° + 1080° = -130°$, quociente 3 $\Rightarrow$ $-1210° = 3 \cdot (-360°) - 130°$, assim, a 1ª determinação *negativa* é $-130°$, portanto, a 1ª determinação *positiva* é $360° - 130° = 230°$

c) $\dfrac{8\pi}{3} \div \left(2\pi = \dfrac{6\pi}{3}\right)$: $\dfrac{8\pi}{3} - \dfrac{6\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$, quociente 1 $\Rightarrow$ $\dfrac{8\pi}{3} = 1 \cdot 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$, portanto, a 1ª determinação positiva é $\dfrac{2\pi}{3}$

Respostas: a) 280°; b) 230°; c) $\dfrac{2\pi}{3}$

13) Os arcos côngruos de $-60°$ são do tipo $-60° + n \cdot 360°$, com $n \in \mathbb{Z}$. Assim, os arcos positivos menores que 1500°, são:

I) Para $n = 1 \Rightarrow -60° + 1 \cdot 360° = 300°$

II) Para $n = 2 \Rightarrow -60° + 2 \cdot 360° = 660°$

III) Para $n = 3 \Rightarrow -60° + 3 \cdot 360° = 1020°$

IV) Para $n = 4 \Rightarrow -60° + 4 \cdot 360° = 1380°$

Resposta: 300°, 660°, 1020° e 1380°

14) a) $n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ b) $\dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$

c) $\pi + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ d) $\dfrac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$

e) $150° + n \cdot 360° \ (n \in \mathbb{Z})$ f) $300° + n \cdot 360° \ (n \in \mathbb{Z})$

15) a) $\dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z})$ b) $n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z})$

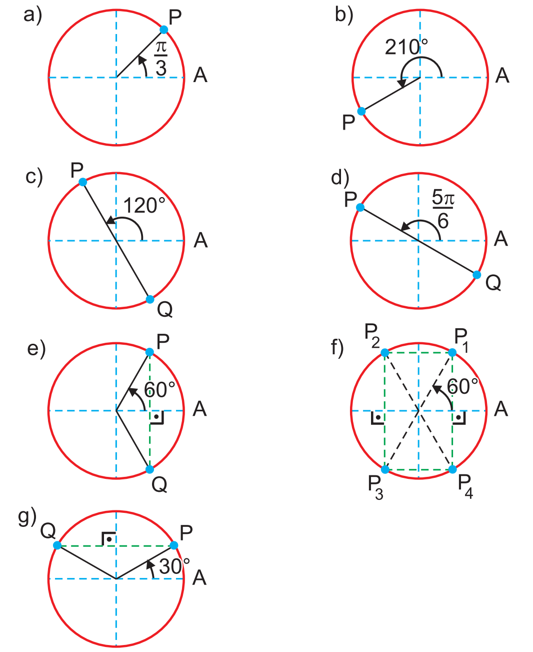
c) $\dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z})$ d) $\dfrac{3\pi}{4} + n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z})$

e) $n \cdot \dfrac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})$ f) $\dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})$

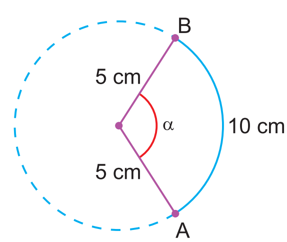
g) $\pm \dfrac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ h) $\pm \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \pi \ (n \in \mathbb{Z})$

i) $\pm 120° + n \cdot 360° \ (n \in \mathbb{Z})$

16)



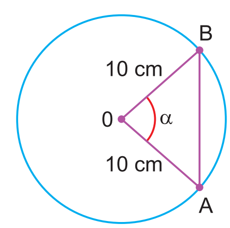
17)



$$\alpha = \frac{\text{comp }(\widehat{AB})}{r} = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 2$$

Resposta: 2 rad

18)



I) Se a corda $\overline{AB}$ mede 10 cm, então, o triângulo OAB é equilátero, portanto, $A\hat{O}B = \alpha = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad

II) $\alpha = \dfrac{\text{comp }(\widehat{AB})}{r} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\text{comp }(\widehat{AB})}{10 \text{ cm}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{comp}(\widehat{AB}) = \dfrac{10\,\pi}{3}$ cm

Resposta: $\dfrac{10\,\pi}{3}$ cm

■ Módulo 6 – Funções Trigonométricas no Ciclo Trigonométrico

1) **Para x variando de 0° a 360°, a expressão (6 – sen x) assume valor mínimo quando sen x é máximo, ou seja, quando sen x = 1.**
Assim, para sen x = 1, tem-se 6 – sen x = 6 – 1 = 5
Resposta: C

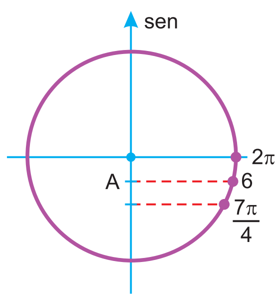
2) **I)** $1920° = 5 \cdot 360° + 120° \Rightarrow 120°$ **é 1ª determinação positiva**

II) $\text{sen } 1920° = \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) **I)** $\dfrac{7\pi}{4} \cong \dfrac{7 \cdot 3{,}14}{4} \cong 5{,}5$

II) $2\pi \cong 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$



III) $5{,}5 < 6 < 6{,}28 \Rightarrow \dfrac{7\pi}{4} < 6 < 2\pi \Rightarrow$

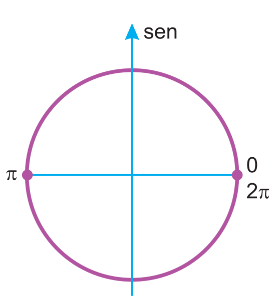
$\Rightarrow \text{sen } \dfrac{7\pi}{4} < \text{sen } 6 < \text{sen } 2\pi \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < A < 0$

Resposta: E

4) $\left(\text{sen } \dfrac{\pi}{2}; \text{sen } \dfrac{\pi}{3}; \text{sen } \dfrac{\pi}{4}; \ldots; \text{sen } \dfrac{\pi}{n}; \ldots\right) =$

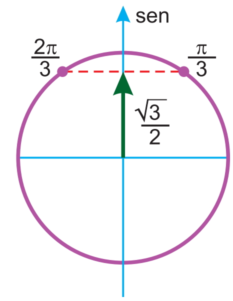
$= \left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \ldots\right)$ **é uma sequência estritamente decrescente, de termos positivos e tende a zero.**
Resposta: B

5) $\text{sen } x = 0$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = 0$ **ou** $x = \pi$ **ou** $x = 2\pi$
Resposta: $V = \{0; \pi; 2\pi\}$

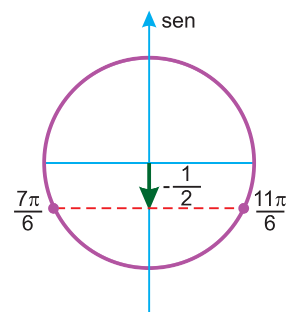
6) $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = \dfrac{\pi}{3}$ **ou** $x = \dfrac{2\pi}{3}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

7) $\text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$**, temos** $x = \dfrac{7\pi}{6}$ **ou** $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

8) $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{15}{16} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow$

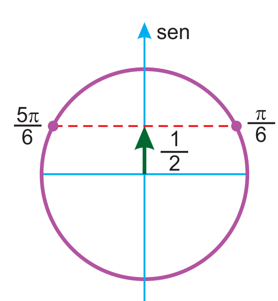
$\Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{4}$**, pois** $x \in$ **4º quadrante**

Resposta: D

9) $-1 \le \text{sen } \theta \le 1 \Rightarrow -1 \le \dfrac{2x - 1}{3} \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 2x - 1 \le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$
Resposta: $-1 \le x \le 2$

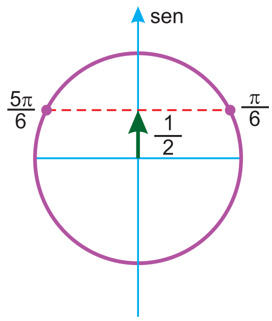
10) $\text{cossec } x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} = 2 \Leftrightarrow \text{sen } x = \dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Resposta: $V = \left\{ \dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6} \right\}$

11) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$



A solução geral da equação, nesses 2 pontos, é:

$x = \dfrac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + n \,.\, 2\pi$

Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} + n \,.\, 2\pi \right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

12) $E = \dfrac{\operatorname{sen} 90° + \cos 360° + \operatorname{sen} 270° \,.\, \cos 180°}{\cos 0° + \operatorname{sen} 0°} =$

$= \dfrac{1 + 1 + (-1) \,.\, (-1)}{1 + 0} = \dfrac{3}{1} = 3$

Resposta: 3

13) Para $x = \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$y = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 4x + \operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{\cos \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}}{\cos 2\pi + \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{0 + 0 - (-1)}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

Resposta: B

14) Como $-1 \le \cos x \le 1$ para $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{2} > 1$, não existe arco x tal que $\cos x = \sqrt{2}$

Resposta: E

15) I) $\dfrac{7\pi}{2} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{3\pi}{2}$ é a 1ª determinação positiva

II) $31\pi = 15 \,.\, 2\pi + \pi \Rightarrow \pi$ é a 1ª determinação positiva

III) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) \,.\, \cos(31\pi) = \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} \,.\, \cos \pi = (-1) \,.\, (-1) = 1$

Resposta: 1

16) $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -3 \le -3 \,.\, \cos x \le 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 3 \le 2 - 3 \,.\, \cos x \le 2 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \le f(x) \le 5 \Rightarrow Im(f) = [-1; 5]$

Resposta: E

17) Para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{2}{3} \cos^2 x \le \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \le 2 + \dfrac{2}{3} \cos^2 x \le \dfrac{8}{3}$

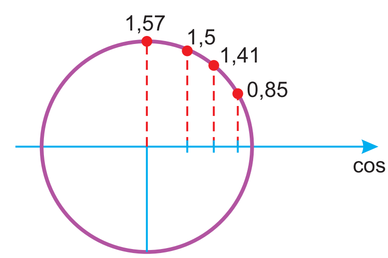
Dessa forma: $2 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{14}{3}$

Resposta: D

18) I) $\dfrac{\pi}{2} \cong \dfrac{3{,}14}{2} = 1{,}57$

II) $\sqrt{2} \cong 1{,}41$

III) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cong \dfrac{1{,}7}{2} = 0{,}85$



IV) Observando a figura, tem-se:

$\cos 1{,}57 < \cos 1{,}5 < \cos 1{,}41 < \cos 0{,}85 \Rightarrow$

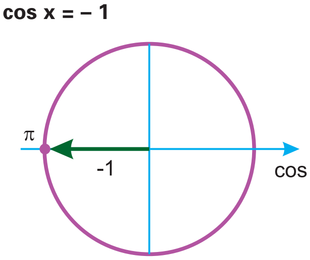
$\Rightarrow \cos \dfrac{\pi}{2} < \cos 1{,}5 < \cos \sqrt{2} < \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, se $F(x) = \cos x$, conclui-se que

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < F(1{,}5) < F(\sqrt{2}) < F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Resposta: E

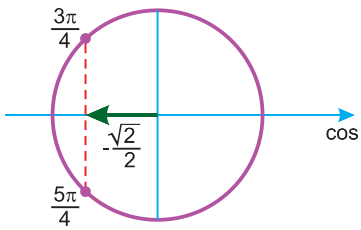
19) $\cos x = -1$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \pi$

Resposta: $V = \{\pi\}$

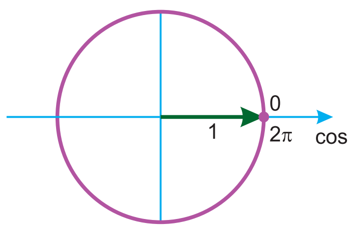
20) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{ \dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

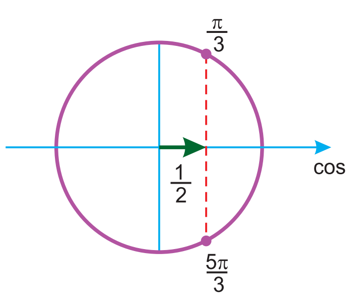
21) $\sec x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = 0$ ou $x = 2\pi$

Resposta: $V = \{0; 2\pi\}$

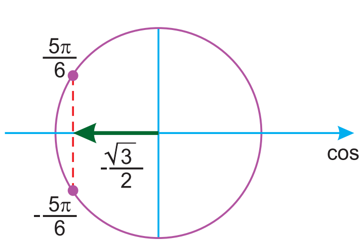
22) $\sec x = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 2 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Resposta: $V = \left\{ \dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3} \right\}$

23) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

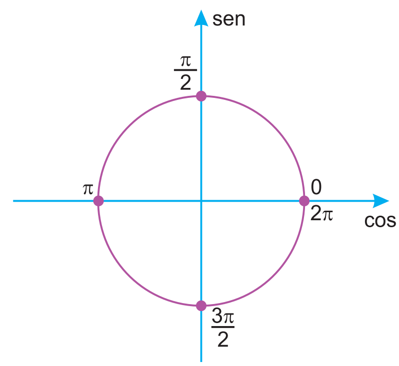


A solução geral da equação, nesses 2 pontos, é:

$x = \pm \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

24) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ ou $\cos x = 0$

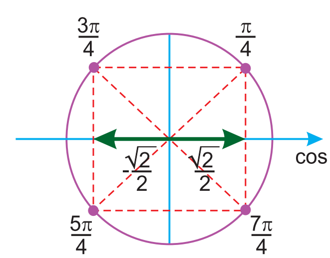


A solução geral da equação, nesses 4 pontos, é:

$x = 0 + n \cdot \dfrac{\pi}{2} = n \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

25) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



A solução geral da equação, nesses 4 pontos é

$x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

26) Para $x = \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$A = \operatorname{sen} 3x + \cos 4x - \operatorname{tg} 2x =$

$= \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2} + \cos 2\pi - \operatorname{tg} \pi = -1 + 1 - 0 = 0$

Resposta: zero

27) Para $x = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \,.\, \tan\left(\frac{3x}{4}\right)}{3 \,.\, \cos x} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + 2 \,.\, \tan\,\frac{\pi}{4}}{3 \,.\, \cos\,\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 2 \,.\, 1}{3 \,.\, \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} \,.\, \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Resposta: B

28) Se $\frac{\pi}{3}$ é raiz da equação $\text{tg}^2x - m \,.\, \cos^2x + \text{sen}^2x = 0$, então:

$$\text{tg}^2\,\frac{\pi}{3} - m \,.\, \cos^2\,\frac{\pi}{3} - \text{sen}^2\,\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 - m \,.\, \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 - \frac{m}{4} + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 12 - m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 15$$

Resposta: 15

29) Se $\text{tg}\,x = \sqrt{1\,302\,076} > 0$, x pode pertencer ao 1º ou 3º quadrantes, pois são os quadrantes nos quais a tangente é positiva.
Resposta: B

30) Para $x = \frac{\pi}{2}$, temos:

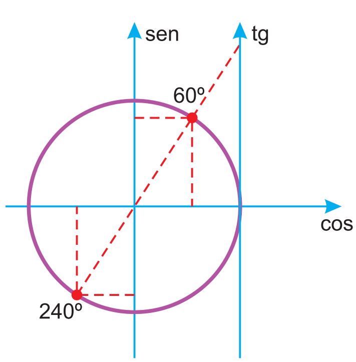
$$y = \cos 4x + \text{sen}\,2x + \text{tg}\,2x - \sec 8x =$$

$$= \cos 2\pi + \text{sen}\,\pi + \text{tg}\,\pi - \sec 4\pi = 1 + 0 + 0 - \frac{1}{\cos 4\pi} =$$

$$= 1 + 0 + 0 - \frac{1}{1} = 0$$

Resposta: D

31)



I) $\text{sen}\,240° = -\,\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

III) $\text{tg}\,240° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

IV) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen}\,240° < \cos 240° < \text{tg}\,240°$

Resposta: C

32) I) $1440° = 4 \,.\, 360° + 0°$

II) $810° = 2 \,.\, 360° + 90°$

III) $720° = 2 \,.\, 360° + 0°$

IV) $\cos 1440° + \text{sen}\,810° + \text{tg}\,720° =$

$= \cos 0° + \text{sen}\,90° + \text{tg}\,0° = 1 + 1 + 0 = 2$

Resposta: B

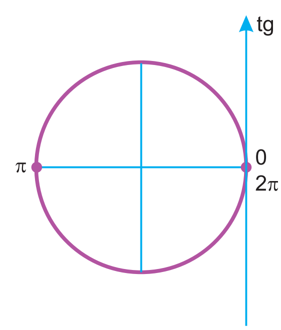
33) I) $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha < 0 \\ \cos\alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in$ 3º quadrante

II) $\begin{cases} \cos\beta < 0 \\ \text{tg}\,\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta < 0 \\ \text{sen}\,\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \beta \in$ 2º quadrante

III) $\begin{cases} \text{sen}\,\gamma > 0 \\ \text{cotg}\,\gamma > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\gamma > 0 \\ \cos\gamma > 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma \in$ 1º quadrante

Resposta: A

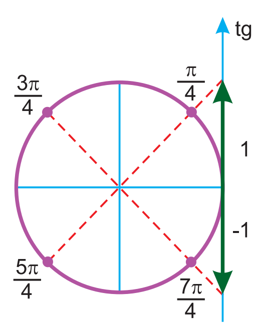
34) $\text{tg}\,x = 0$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

Resposta: $V = \{0; \pi; 2\pi\}$

35) $\text{tg}\,x = \pm 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,x = -1$ ou $\text{tg}\,x = 1$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ ou

$x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

36) I) $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, pois $\alpha \in 2^{\text{o}}$ quadrante

II) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{3}{5}}{-\dfrac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

Resposta: C

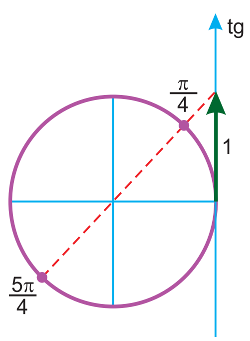
37) I) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pois $x \in 2^{\text{o}}$ quadrante

II) $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

Resposta: A

38) $\text{cotg}\,x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{tg}\,x} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,x = 1$

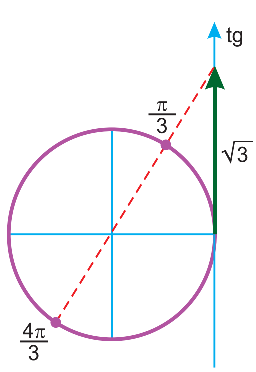


Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

39) $\text{cotg}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{tg}\,x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

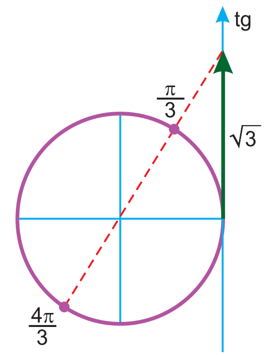
$\Leftrightarrow \text{tg}\,x = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$



Para $0 \le x \le 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Resposta: $V = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

40) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$



A solução geral da equação, nesses 2 pontos, é:

$x = \dfrac{\pi}{3} + n \,.\, \pi$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + n \,.\, \pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

■ Módulo 7 – Funções Trigonométricas no Ciclo Trigonométrico

1) Para $\text{cossec}\,x = \dfrac{5}{4}$, tem-se:

I) $\text{cossec}\,x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} \Rightarrow \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,x = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{16}{25}$

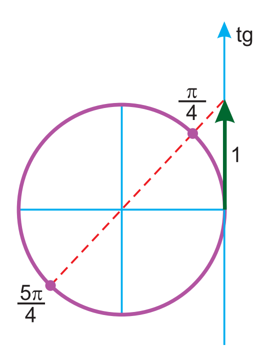
II) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

III) $\text{tg}^2 x = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{16}{25}}{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{16}{9}$

IV) $25 \,.\, \text{sen}^2 x - 9 \,.\, \text{tg}^2 x = 25 \,.\, \dfrac{16}{25} - 9 \,.\, \dfrac{16}{9} = 16 - 16 = 0$

Resposta: D

2) $\text{sen}\,x = \cos x \Leftrightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,x = 1$

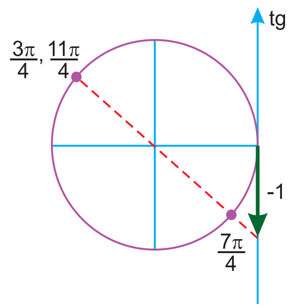


Para $0 < x < 2\pi$, temos $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{ \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4} \right\}$

3) $\cos x + \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = -\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = -1 \Leftrightarrow \text{tg } x = -1$



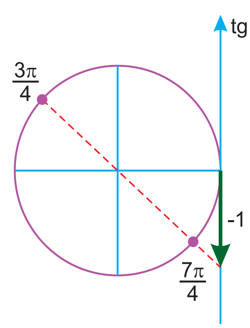
Para $x \in [0; 3\pi]$, temos $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{4}$, portanto, 3 soluções.

Resposta: C

4) Para que a função $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } x + \cos x}$ exista, devemos ter

$\text{sen } x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x \neq -\cos x \Leftrightarrow$

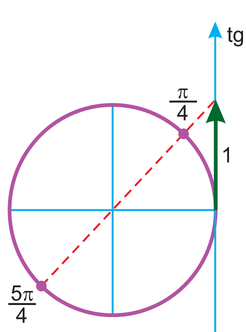
$\Leftrightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \neq -1 \Leftrightarrow \text{tg } x \neq -1$



Assim, o domínio da função é $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + n \,.\, \pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{3\pi}{4} + n \,.\, \pi \right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

5) $\text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2} \right) = 1$



A solução geral da equação é:

$x - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + n \,.\, \pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} + n \,.\, \pi \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + n \,.\, \pi$

Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{4} + n \,.\, \pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$

6) Para que a função $f(x) = 2 - \text{tg}\left(\dfrac{x}{3} \right)$ exista, devemos ter:

$\dfrac{x}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + n \,.\, \pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{2} + n \,.\, 3\pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{3\pi}{2} + n \,.\, 3\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$

7) A função $y = \text{tg}(2x - 30°)$ não é definida para

$2x - 30° = 90° + n \,.\, 180° \Leftrightarrow 2x = 120° + n \,.\, 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 60° + n \,.\, 90°$

Sendo $0° < x < 90°$, temos, para $n = 0$, $x = 60°$

Resposta: 60°

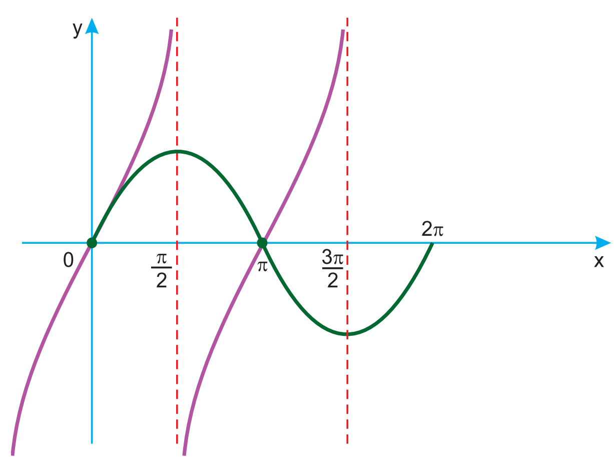
8) $\text{tg } x + \text{cotg } x = 3 \Leftrightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen } x \,.\, \cos x} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x \,.\, \cos x} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \,.\, \cos x = \dfrac{1}{3}$

Resposta: D

9) Sendo $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \text{tg } x$, temos os seguintes gráficos:



Os pontos de encontro dos gráficos das funções são as soluções da equação $f(x) = g(x)$, assim, temos:

$\text{sen } x = \text{tg } x \Leftrightarrow \text{sen } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen } x - \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \left(1 - \dfrac{1}{\cos x} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = 0 \text{ ou } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = n \,.\, \pi$

Para $0 < x < \pi$, a equação não tem solução, ou seja, não existem pontos de encontro dos gráficos.

Resposta: zero

10) Se $\dfrac{\pi}{2} < y < \pi$, então:

$$\begin{cases} tg\ y = 2x + 3 \\ cotg\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ y = 2x + 3 \\ \dfrac{1}{tg\ y} = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ y = 2x + 3 \\ \dfrac{1}{2x + 3} = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg\ y = 2x + 3 \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\ y = 2x + 3 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ tg\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Resposta: $x = -2$ e $y = \dfrac{3\pi}{4}$

11) I) $\begin{cases} sec\ x + tg\ x = m \\ sec\ x - tg\ x = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \,.\, tg\ x = m - n \\ 2 \,.\, sec\ x = m + n \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg\ x = \dfrac{m - n}{2} \\ sec\ x = \dfrac{m + n}{2} \end{cases}$$

II) $sec^2x = 1 + tg^2x \Rightarrow \left(\dfrac{m + n}{2}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{m - n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m.n + n^2}{4} = 1 + \frac{m^2 - 2m.n + n^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m.n + n^2 = 4 + m^2 - 2m.n + n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m.n = 4 \Leftrightarrow m.n = 1$$

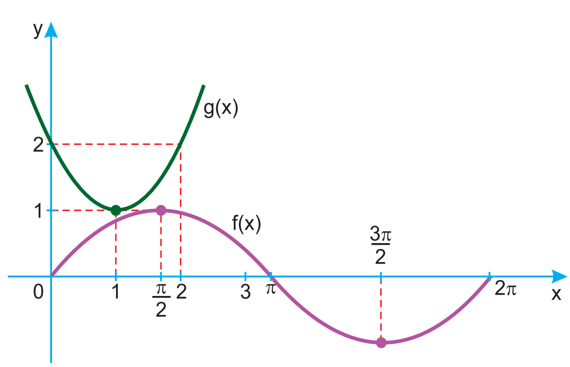
Resposta: B

12) Considerando a função $g(x) = x^2 - 2x + 2$, tem-se:

I) A abscissa do vértice é $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

II) A ordenada do vértice é $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{4}{4} = 1$

Representando graficamente as funções $g(x) = x^2 - 2x + 2$ e $f(x) = sen\ x$, temos:

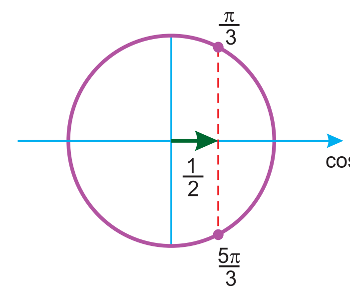


Como os gráficos não possuem intersecção, a equação $sen\ x = 2 - 2x + x^2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ não tem solução.

Resposta: zero

13) $9^{-\cos x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow (3^2)^{-\cos x} = 3^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{-2\cos x} = 3^{-1} \Leftrightarrow -2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



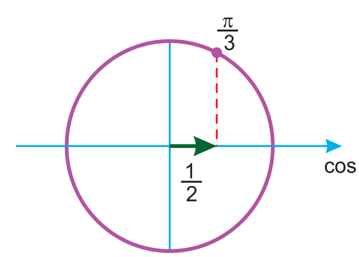
O menor valor positivo de x para o qual $\cos x = \dfrac{1}{2}$ é $\dfrac{\pi}{3}$.

Resposta: C

14) I) $\dfrac{625^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{(25^2)^{\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{25^{2\,.\,\cos^2 x}}{25^{\cos x}} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 25^{2\,.\,\cos^2 x - \cos x} = 25^0 \Leftrightarrow 2\,.\,\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,.\,(2\,.\,\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$



II) Para $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$ não tem solução e

$\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

Resposta: D

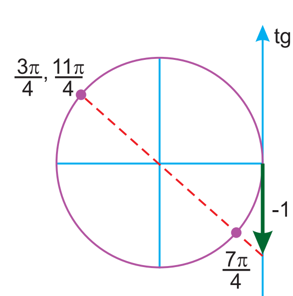
15) Como $-1 \le sen\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) \le 1$, o valor mínimo de P(t) é obtido quando $sen\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, isto é:

$$t - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 2\pi$$

Resposta: D

16) $\cos x + sen\ x = 0 \Leftrightarrow sen\ x = -\cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{sen\ x}{\cos x} = -1 \Leftrightarrow tg\ x = -1$$



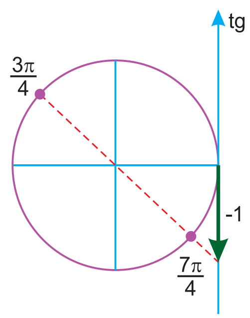
Para $x \in [0; 3\pi]$, temos $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{4}$, portanto, 3 soluções.

Resposta: C

17) Para que a função $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } x + \cos x}$ exista, devemos ter

$\text{sen } x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x \neq -\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \neq -1 \Leftrightarrow \text{tg } x \neq -1$

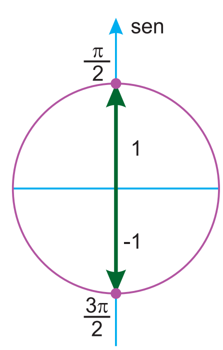


Assim, o domínio da função é $x \neq \dfrac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3\pi}{4} + n \cdot \pi\right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

18) $\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x = 3 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \text{sen}^4 x = \text{sen}^6 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x = 1$ ou $\text{sen } x = -1$



A solução geral da equação é $x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

19) Para que a função $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen } x}$ exista, devemos ter

$1 - \text{sen } x \neq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

Resposta: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

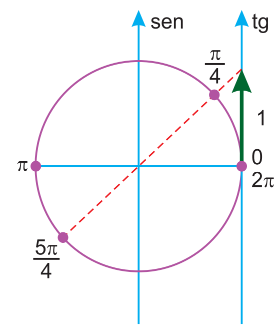
20) $\text{sen } x = \sec x - \cos x \Leftrightarrow \text{sen } x = \dfrac{1}{\cos x} - \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = 1 - (1 - \text{sen}^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = 1 - 1 + \text{sen}^2 x \Leftrightarrow \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cdot (\cos x - \text{sen } x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x - \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = \cos x \Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$



A solução geral da equação é $x = n \cdot \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot \pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

21) Para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, temos:

I) $\text{sen } x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \text{cossec } x = 3$

II) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

III) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

IV) $A = \dfrac{\text{sen } x \cdot \cos x - \text{tg } x}{1 - \text{cossec } x} = \dfrac{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}}{1 - 3} =$

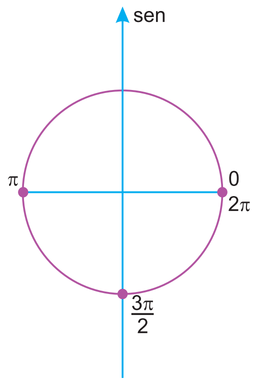
$= \dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{9} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}}{-2} = \dfrac{\dfrac{8\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{36}}{-2} =$

$= \dfrac{-\sqrt{2}}{36} \cdot \dfrac{1}{-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{72}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{72}$

22) $\text{sen}^2 2x + \text{sen } 2x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } 2x \, . \, (\text{sen } 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } 2x = 0$ ou $\text{sen } 2x = -1$



Para $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2\pi$, tem-se:

I) $\text{sen } 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0$ ou $2x = \pi$ ou $2x = 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \pi$

II) $\text{sen } 2x = -1 \Rightarrow 2x = \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$

III) $V = \left\{0; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}; \pi\right\}$, portanto, são 4 soluções para $x \in [0; \pi]$

Resposta: 4

23) Sendo x um arco do 2º quadrante e $\cos x = -\dfrac{3}{4}$, temos:

I) $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16} \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

II) $\cos(\pi + x) = -\cos x = -\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$

III) $\cos(\pi + x) + \text{sen } x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{\sqrt{7} + 3}{4}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{7} + 3}{4}$

24) I) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^4 x + 2 \, . \, \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \, . \, \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x$

II) $\cos^4 x + \text{sen}^4 x - 2 \, . \, \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2 \, . \, \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x - 2 \, . \, \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 \, . \, \text{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = 0$ ou $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = n \, . \, \dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \, . \, \dfrac{\pi}{2}, (n \in \mathbb{Z})\right\}$

25) I) $\begin{cases} \cos x + m \, . \, \text{sen } x = 0 \\ \cos x - m \, . \, \text{sen } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \, . \, \cos x = 1 \\ 2m \, . \, \text{sen } x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen } x = -\dfrac{1}{2m} \end{cases}$

II) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2m}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4m^2} + \dfrac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 1 + m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow 3m^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} \, . \, \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Resposta: $m = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

26) $\cos x - \text{sen}^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x - (1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -2$ (impossível)

ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = n \, . \, 2\pi, n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = n \, . \, 2\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

27) Para *x* dezenas de certo produto, o lucro L(x) em *milhares* de reais é obtido por L(x) = V(x) – C(x).

Para x = 3, resulta:

$L(3) = 3 \, . \, \sqrt{2} \, . \, \text{sen}\left(\dfrac{3 \, . \, \pi}{12}\right) - \left[2 - \cos\left(\dfrac{3 \, . \, \pi}{6}\right)\right] =$

$= 3 \, . \, \sqrt{2} \, . \, \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3 \, . \, \sqrt{2} \, . \, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2 + 0 =$

$= 3 - 2 = 1$

Portanto, o lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas dessas peças é 1 000.

Resposta: C

28) A função $f(x) = 900 - 800 \, . \, \text{sen}\left(\dfrac{x \, . \, \pi}{12}\right)$, em que f(x) é o número de clientes, assume:

I) número máximo de clientes, quando

$\text{sen}\left(\dfrac{x \, . \, \pi}{12}\right) = -1$ (às 18 horas), igual a:

$f(18) = 900 - 800 \, . \, \text{sen}\left(\dfrac{18 \, . \, \pi}{12}\right) = 900 - 800 \, . \, (-1) = 1700$

II) número mínimo de clientes, quando

$\text{sen}\left(\dfrac{x\,.\,\pi}{12}\right) = 1$ (às 6 horas), igual a:

$f(6) = 900 - 800\,.\,\text{sen}\left(\dfrac{6\,.\,\pi}{12}\right) = 900 - 800 = 100$

Portanto, a diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a 1600.

Resposta: E

29) $2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

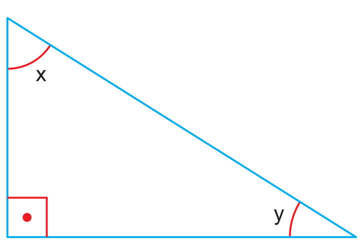
$\Rightarrow \dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{\pi}{6} + n\,.\,2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + n\,.\,4\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Para $x \in [-\pi; 4\pi]$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$x = -\dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{11\pi}{3},\ x = \dfrac{\pi}{3}$

Resposta: C

30)



Se $x + y = 90°$, temos $\cos y = \text{sen}\,x$.

Então $\cos^2x = 3\cos^2y \Leftrightarrow \cos^2x = 3\,\text{sen}^2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2x = 3(1 - \cos^2x) \Leftrightarrow \cos^2x = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (x é agudo)

Portanto: $x = 30°$, $y = 60°$ e $y - x = 30°$

Resposta: B

31) Para $0 < z < 2\pi$, tem-se:

$2\,\text{sen}^2z + \text{sen}\,z - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,z = -1$ ou $\text{sen}\,z = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3\pi}{2}$ ou $z = \dfrac{\pi}{6}$ ou $z = \dfrac{5\pi}{6}$

Assim, a soma dos possíveis valores de z em radianos é

$\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{2}$, que corresponde a 450°.

Resposta: E

32) Lembrando que $\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$\text{sen}^2x - \text{sen}(-x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x + \text{sen}\,x = 0 \Leftrightarrow$

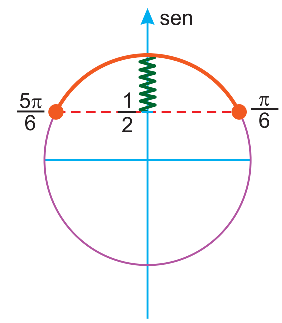
$\Leftrightarrow \text{sen}\,x = -1$ ou $\text{sen}\,x = 0$

Para $x \in [0;2\pi]$, temos:

$x = 0,\ x = \pi,\ x = \dfrac{3\pi}{2}$ ou $x = 2\pi$ e $0 + \pi + \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{2}$

Resposta: B

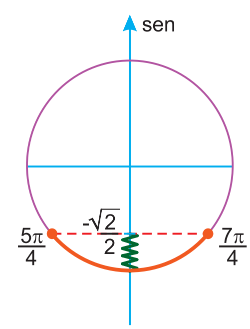
33) $\text{sen}\,x \geq \dfrac{1}{2}$



Para $0 \leq x < 2\pi$, temos $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

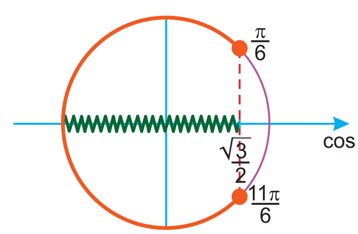
34) $\text{sen}\,x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Para $0 \leq x < 2\pi$, temos $\dfrac{5\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{5\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

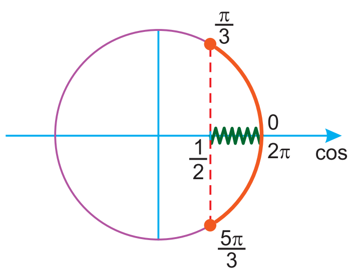
35) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Para $0 \le x < 2\pi$, temos $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{11\pi}{6}$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

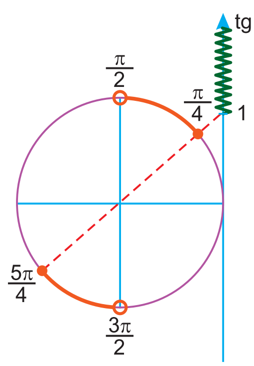
36) $\cos x \ge \dfrac{1}{2}$



Para $0 \le x < 2\pi$, temos $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{3} \le x < 2\pi$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} \le x < 2\pi\right\}$

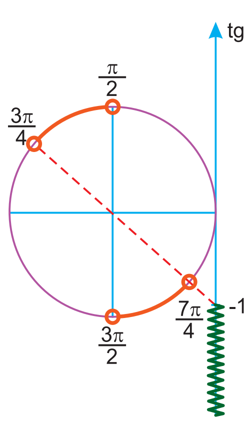
37) $\text{tg } x \ge 1$



Para $0 \le x < 2\pi$, temos $\dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{5\pi}{4} \le x < \dfrac{3\pi}{2}$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} \le x < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

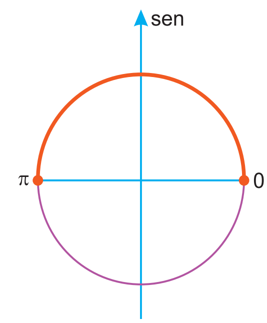
38) $\text{tg } x < -1$



Para $0 \le x < 2\pi$, temos $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{7\pi}{4}$

Resposta: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

39) Para que a função $y = \sqrt{\text{sen } x}$ exista, em $\mathbb{R}$, devemos ter $\text{sen } x \ge 0$.

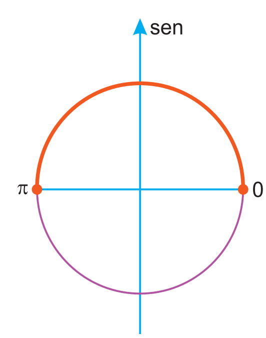


Assim, o domínio da função é:

$0 + n \cdot 2\pi \le x \le \pi + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow n \cdot 2\pi \le x \le \pi + n \cdot 2\pi$

Resposta: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid n \cdot 2\pi \le x \le \pi + n \cdot 2\pi\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

40) I) Para que a função $f(x) = \sqrt{\text{sen } 3x}$ exista, em $\mathbb{R}$, devemos ter $\text{sen } 3x \ge 0$



II) $0 + n \cdot 2\pi \le 3x \le \pi + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow n \cdot \dfrac{2\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \dfrac{2\pi}{3}$

III) Sendo $0 \le x \le \pi$, temos:

para $n = 0 \Rightarrow 0 \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$

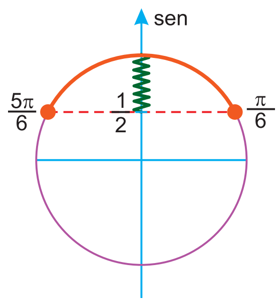
para $n = 1 \Rightarrow \dfrac{2\pi}{3} \le x \le \pi$

Resposta: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} \le x \le \pi\right\}$

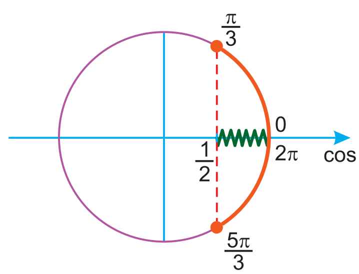
41) Para que a função $f(x) = \text{sen } \sqrt{x}$ exista, devemos ter $x \ge 0$

Resposta: $\mathbb{R}_+$

42) I) $\text{sen } x > \dfrac{1}{2}$



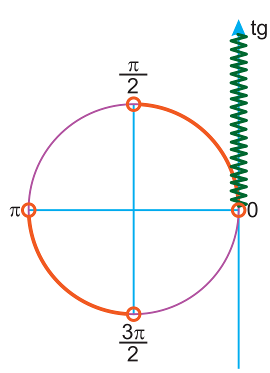
II) $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$



III) $\begin{cases} \text{sen } x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi < x \leq \dfrac{\pi}{3} + n \,.\, 2\pi$

Resposta: $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi < x \leq \dfrac{\pi}{3} + n \,.\, 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

43) $\text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4} \right) > 0$



As soluções da inequação são tais que:

$0 + n \,.\, \pi < x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2} + n \,.\, \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + n \,.\, \pi < x < \dfrac{\pi}{4} + n \,.\, \pi$

Sendo $0 \leq x < 2\pi$, temos:

I) para $n = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \dfrac{\pi}{4}$

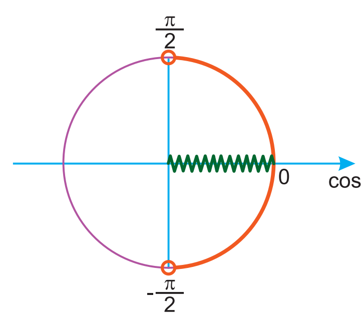
II) para $n = 1 \Rightarrow \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4}$

III) para $n = 2 \Rightarrow \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi$

Resposta:

$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \leq x < \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi \right\}$

44) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4} \right) > 0$



As soluções da inequação são tais que:

$-\dfrac{\pi}{2} + n \,.\, 2\pi < 2x - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2} + n \,.\, 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + n \,.\, 2\pi < 2x < \dfrac{3\pi}{4} + n \,.\, 2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{8} + n \,.\, \pi < x < \dfrac{3\pi}{8} + n \,.\, \pi$

Resposta:

$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\dfrac{\pi}{8} + n \,.\, \pi < x < \dfrac{3\pi}{8} + n \,.\, \pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

45) $\dfrac{1}{\cos^2 x} < 2 \,.\, \text{tg } x \Leftrightarrow \sec^2 x < 2 \,.\, \text{tg } x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2 x < 2 \,.\, \text{tg } x \Leftrightarrow \text{tg}^2 x - 2 \,.\, \text{tg } x + 1 < 0 \Leftrightarrow$

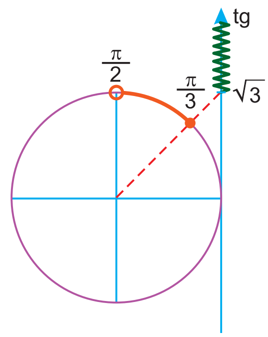
$\Leftrightarrow (\text{tg } x - 1)^2 < 0$, não tem solução

Resposta: $V = \varnothing$

46) Sendo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, então $0 \leq \cos x \leq 1$, assim:

I) $\text{sen} x \geq \sqrt{3} \,.\, \cos x \Leftrightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \geq \dfrac{\sqrt{3} \,.\, \cos x}{\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg } x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$



II) $x = \dfrac{\pi}{2}$ é solução da equação sen $x \geq \sqrt{3}$. cos x, pois

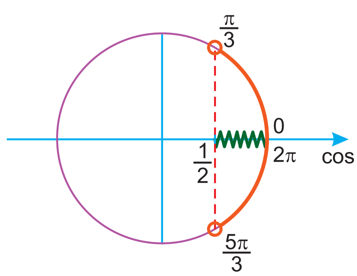
sen $\dfrac{\pi}{2} \geq \sqrt{3}$. cos $\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{3} \cdot 0$ é verdadeiro

Portanto, de (I) e (II) concluímos que $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right\}$

47) A equação $x^2 + \sqrt{2} \cdot x + \cos\theta = 0$ não admite soluções reais se $\Delta < 0$, assim:

$(\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \cos\theta < 0 \Leftrightarrow 2 - 4 \cdot \cos\theta < 0 \Leftrightarrow \cos\theta > \dfrac{1}{2}$



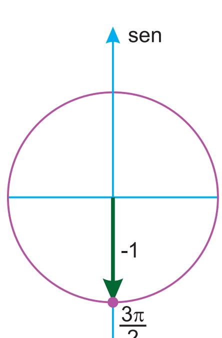
Para $0 \leq \theta \leq \pi$, $\cos\theta > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{3}$

Resposta: A

48) $\cos^2 x \geq 2 \cdot (\text{sen } x + 1) \Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2 x \geq 2 \cdot (\text{sen } x + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2 x \geq 2 \text{ sen } x + 2 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{sen } x + 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = -1$



A solução geral da inequação é $x = \dfrac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

■ Módulo 8 – Adição e Subtração de Arcos – Arco Duplo

1) sen 75° = sen (45° + 30°) = sen 45° cos 30° + sen 30° cos 45° =

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Resposta: E

2) Fazendo x = sen 15° + cos 15°, temos:

I) $x^2 = (\text{sen } 15° + \cos 15°)^2 =$

$= \text{sen}^2 15° + 2 \cdot \text{sen } 15° \cdot \cos 15° + \cos^2 15° =$

$= 1 + \text{sen } 30° = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

II) $x^2 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, pois $x > 0$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

3) y = sen 105° – cos 75° = sen(45° + 60°) – cos(45° + 30°) =

= sen 45° . cos 60° + sen 60° . cos 45° –

– cos 45° . cos 30° + sen 45° . sen 30° =

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} =$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4) Como $\dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b} = \text{tg } (a - b)$,

para a = x + y e b = y obtém-se

$\dfrac{\text{tg}(x + y) - \text{tg } y}{1 + \text{tg}(x + y) \cdot \text{tg } y} = \text{tg}(x + y - y) = \text{tg } x$

Resposta: tg x

5) I) $\begin{cases} \text{sen } y = \dfrac{3}{5} \\ 0 < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } y = \dfrac{3}{5} \\ \cos y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

II) $x + y = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} - y \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right) =$

$= \text{sen } \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

Resposta: $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

6) $\begin{cases} tg\,(x+y) = 33 \\ tg\,x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \,.\, tg\,y} = 33 \Rightarrow \\ tg\,x = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{3 + tg\,y}{1 - 3\,tg\,y} = 33 \Leftrightarrow 3 + tg\,y = 33 - 99\,tg\,y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\,y + 99\,tg\,y = 33 - 3 \Leftrightarrow 100\,tg\,y = 30 \Leftrightarrow tg\,y = 0{,}3$

Resposta: B

7) I) $sen(x + y) + sen(x - y) = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow sen\,x \,.\, cos\,y + sen\,y \,.\, cos\,x +$
$+ sen\,x \,.\, cos\,y - sen\,x \,.\, cos\,y = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \,.\, sen\,x \,.\, cos\,y = 2 \Leftrightarrow sen\,x \,.\, cos\,y = 1$

II) $\begin{cases} sen(x+y) + sen(x-y) = 2 \\ sen\,x + cos\,y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sen\,x \,.\, cos\,y = 1 \\ sen\,x + cos\,y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} sen\,x = 1 \\ cos\,y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ y = 0 \end{cases}$, pois $0 \le x < 2\pi$ e $0 \le y < 2\pi$

Resposta: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)\right\}$

8) I) $sen\,150° = sen\,30° = \dfrac{1}{2}$

II) $E = sen(150° + a) + sen(150° - a) =$
$= sen\,150° \,.\, cos\,a + sen\,a \,.\, cos\,150° +$
$+ sen\,150° \,.\, cos\,a - sen\,a \,.\, cos\,150° =$
$= 2 \,.\, sen\,150° \,.\, cos\,a = 2 \,.\, \dfrac{1}{2} \,.\, cos\,a = cos\,a$

Resposta: cos a

9) Se $cos\,x = \dfrac{3}{5}$, então:

$sen\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = sen\,\dfrac{\pi}{2} \,.\, cos\,x + sen\,x \,.\, cos\,\dfrac{\pi}{2} =$

$= 1 \,.\, cos\,x + 0 \,.\, sen\,x = cos\,x = \dfrac{3}{5}$

Resposta: $\dfrac{3}{5}$

10) I) $sen(-x) = sen(0 - x) = sen\,0 \,.\, cos\,x - sen\,x \,.\, cos\,0 = -\,sen\,x$
II) $sen(\pi + x) = sen\,\pi \,.\, cos\,x + sen\,x \,.\, cos\,\pi = -\,sen\,x$
III) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = sen\,\dfrac{\pi}{2} \,.\, cos\,x - sen\,x \,.\, cos\,\dfrac{\pi}{2} = cos\,x$

IV) $E = sen(-x) + sen(\pi + x) - sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + cos\,x =$

$= -\,sen\,x + (-\,sen\,x) - cos\,x + cos\,x = -\,2 \,.\, sen\,x$

Resposta: – 2 . sen x

11) I) $8\pi = 4 \,.\, 2\pi + 0$
II) $10\pi = 5 \,.\, 2\pi + 0$
III) $sen(8\pi - a) = sen(0 - a) = sen\,0 \,.\, cos\,a - sen\,a \,.\, cos\,0 =$
$= -\,sen\,a$

IV) $cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = cos\,\dfrac{\pi}{2} \,.\, cos\,a + sen\,\dfrac{\pi}{2} \,.\, sen\,a = sen\,a$

V) $sec\,10\pi = sec\,0 = \dfrac{1}{cos\,0} = \dfrac{1}{1} = 1$

VI) $sen(8\pi - a) \,.\, cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) + sec\,10\pi = cos^n a \Rightarrow$

$\Rightarrow -\,sen\,a \,.\, sen\,a + 1 = cos^n a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\,sen^2 a + 1 = cos^n a \Leftrightarrow 1 - sen^2 a = cos^n a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow cos^2 a = cos^n a \Leftrightarrow n = 2$

Resposta: n = 2

12) I) $cotg\,\alpha = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow tg\,\alpha = \dfrac{4}{3}$

II) $cotg\,\beta = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow tg\,\beta = 7$

III) $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta} = \dfrac{\dfrac{4}{3} + 7}{1 - \dfrac{4}{3} \,.\, 7} = \dfrac{\dfrac{25}{3}}{-\dfrac{25}{3}} = -\,1$

IV) $tg(\alpha + \beta) = -\,1 \Rightarrow \alpha + \beta = 135°$, pois α e β são agudos

Resposta: 135°

13) Lembrando que $cos\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\,30° = \dfrac{1}{2}$, tem-se:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \,.\, sen\,x + \dfrac{1}{2} \,.\, cos\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos\,30° \,.\, sen\,x + sen\,30° \,.\, cos\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\,(x + 30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 30° = 60° + n \,.\, 360°$ ou $x + 30° = 120° + n \,.\, 360°,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 30° + n \,.\, 360°$ ou $x = 90° + n \,.\, 360°,\ n \in \mathbb{Z}$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \,.\, 360°$ ou
$x = 90° + n \,.\, 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

14) I) $sen(\pi - x) = sen\,\pi \,.\, cos\,x - sen\,x \,.\, cos\,\pi = sen\,x$

II) $sen\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = sen\,\dfrac{3\pi}{2} \,.\, cos\,x + sen\,x \,.\, \dfrac{3\pi}{2} = -\,cos\,x$

III) Se $x = \dfrac{\pi}{5}$, tem-se:

$2 \,.\, cos\,\pi \,.\, sen\,(\pi - x) \,.\, sen\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) =$

$= 2 \,.\, (-\,1) \,.\, sen\,x \,.\, (-\,cos\,x) = 2 \,.\, sen\,x \,.\, cos\,x = sen(2x) =$

$= sen\,\dfrac{2\pi}{5}$

Resposta: C

15) I) $\cos(90° + x) = -\operatorname{sen} x$

II) $\cos(180° - x) = -\cos x$

III) $\cos(360° - x) = \cos x$

IV) $\cos(90° - x) = \operatorname{sen} x$

V) $\operatorname{sen}(270° + x) = -\cos x$

VI) $\operatorname{sen}(90° + x) = \cos x$

VII) $\operatorname{sen}(360° + x) = \operatorname{sen} x$

VIII) $$\frac{\cos(90°+x) + \cos(180°-x) + \cos(360°-x) + 3 \,.\, \cos(90°-x)}{\operatorname{sen}(270°+x) - \operatorname{sen}(90°+x) - \cos(90°-x) + \operatorname{sen}(360°+x)} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x + \cos x + 3 \,.\, \operatorname{sen} x}{-\cos x - \cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{2 \,.\, \operatorname{sen} x}{-2 \,.\, \cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

Resposta: $-\operatorname{tg} x$

16) Se $a + b = 30°$, então:

$(\cos a + \operatorname{sen} b)^2 + (\cos b + \operatorname{sen} a)^2 =$

$= \cos^2 a + 2 \,.\, \cos a \,.\, \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b +$

$+ 2 \,.\, \cos b \,.\, \operatorname{sen} a + \operatorname{sen}^2 a =$

$= 1 + 1 + 2 \,.\, (\operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a) =$

$= 2 + 2 \,.\, \operatorname{sen}(a + b) = 2 + 2 \,.\, \operatorname{sen} 30° = 2 + 2 \,.\, \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$

Resposta: E

17) Se $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ e $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$, então:

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{1 + \frac{1}{15}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{16}{15}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Resposta: D

18) I) $\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

II) $$\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}$$

III) $\cos(180° + x) = -\cos x$

IV) $\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$

V) $$y = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{2} - x\right) . \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(180° + x) \,.\, \sec(-x)} =$$

$$= \frac{-\cos x \,.\, \frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}}{-\cos x \,.\, \frac{1}{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{-1} = -\operatorname{sen} x$$

Resposta: B

19) I) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

II) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

III) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

IV) $\cos(x + \pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{cotg} x =$

$= -\cos x + \cos x - (-\operatorname{tg} x) + \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x =$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} =$$

$$= \frac{2}{2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x} = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x)}$$

Resposta: A

20) Se $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, então:

I) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

II) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Resposta: D

21) I) $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ 90° < x < 180° \end{cases} \Rightarrow x = 150°$

II) $\cos(2x) = \cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

Resposta: C

22) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \operatorname{sen} x \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 1 \\ 1 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x =$$

$= \operatorname{sen}(2x) + 1 - (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \operatorname{sen}(2x) + 1 - 1 = \operatorname{sen}(2x)$

Resposta: B

23) I) $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2\pi$

II) $2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}$ ou $2x = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

III) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Resposta: D

24) Para $\text{sen}\, a = \frac{4}{5}$, tem-se:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a = \pm \frac{3}{5}$

a) $\text{sen}\,(2a) = 2 \,.\, \text{sen}\, a \,.\, \cos a = 2 \,.\, \frac{4}{5} \,.\, \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \pm \frac{24}{25}$

b) $\cos(2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$

Respostas: a) $\pm \frac{24}{25}$; b) $-\frac{7}{25}$

25) I) $\text{sen}\, x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$

II) $\text{sen}(2x) = 2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x = 2 \,.\, (-1) \,.\, 0 = 0$

Resposta: 0

26) Sendo $\cos x = \frac{3}{4}$ e observando que

$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \,.\, \cos^2 x - 1$, tem-se:

I) $\cos(2x) = 2 \,.\, \cos^2 x - 1 = 2 \,.\, \frac{9}{16} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$

II) $\cos(4x) = 2 \,.\, \cos^2(2x) - 1 = 2 \,.\, \frac{1}{64} - 1 = \frac{1}{32} - 1 = -\frac{31}{32}$

Resposta: $-\frac{31}{32}$

27) $y = (\text{sen}\, x + \cos x)^2 = \text{sen}^2 x + 2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x + \cos^2 x =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + (2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x) = 1 + \text{sen}(2x)$

Resposta: $1 + \text{sen}(2x)$

28) $y = (\text{sen}\, x + \cos x + 1) \,.\, (\text{sen}\, x + \cos x - 1) =$

$= (\text{sen}\, x + \cos x)^2 - 1^2 = \text{sen}^2 x + 2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x + \cos^2 x - 1 =$

$= 2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \cos x = \text{sen}(2x)$

Resposta: C

29) $\text{sen}\, a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\text{sen}\, a - \cos a)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2 a - 2\text{sen}\, a \cos a + \cos^2 a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \text{sen}\,(2a) = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{25} = \text{sen}\,(2a) \Leftrightarrow \text{sen}\,(2a) = \frac{24}{25}$

Resposta: B

30) $y = 3 + \text{sen}\, x \,.\, \cos x = 3 + \frac{1}{2} \,.\, 2\, \text{sen}\, x \cos x = 3 + \frac{1}{2}\, \text{sen}\,(2x)$

Para $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le 2x \le \pi$, temos:

$0 \le \text{sen}\,(2x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{0}{2} \le \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 + 3 \le 3 + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2x) \le \frac{1}{2} + 3 \Leftrightarrow 3 \le y \le \frac{7}{2}$

O maior valor que y pode assumir é, portanto, igual a $\frac{7}{2}$.

Resposta: D

31) $\text{sen}\, x = \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen}\, x \,.\, \cos x = 1$ e $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\, \text{sen}\, x \cos x = 2$ e $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,(2x) = 2$

A solução da equação proposta é $V = \varnothing$, pois $-1 \le \text{sen}\,(2x) \le 1$

Resposta: E

32) $2 \,.\, \cos(2x) - \cos x = 3 \Leftrightarrow 2 \,.\, (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - \cos x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, (2 \,.\, \cos^2 x - 1) - \cos x = 3 \Leftrightarrow 4 \,.\, \cos^2 x - 2 - \cos x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \,.\, \cos^2 x - \cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 \pm 9}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -1$, pois $-1 \le \cos x \le 1$

Como $x \in]0; 5\pi[$, tem-se $x = \pi$ ou $x = 3\pi$

Resposta: $\{\pi; 3\pi\}$

33) Sendo $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = \text{sen}^2 x - 1$, temos:

$f(x) + g(x) = \cos(2x) + \text{sen}^2 x - 1 =$

$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x - 1 = -\text{sen}^2 x + 1 - 1 = -\text{sen}^2 x$

Resposta: C

34) I) Sendo $\text{tg}(2x) = \frac{2 \,.\, \text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}$, fazendo $x = \frac{a}{2}$, temos:

$$\text{tg}\, a = \frac{2 \,.\, \text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

II) Para $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}$, temos:

$$\text{tg}\, a = \frac{2 \,.\, \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Resposta: A

35) I) $\cos(2x) = \cos^2x - \operatorname{sen}^2x = 1 - \operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}^2x = 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2x$

II) $\cos(2x) + 2 \,.\, \operatorname{sen}^2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2x + 2 \,.\, \operatorname{sen}^2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$, assim, não existe x que satisfaça a equação.

Resposta: C

36) $\cos^2x + 2 \,.\, \operatorname{sen}^2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2x + 2 \,.\, \operatorname{sen}^2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2x = -3$, assim, a equação não tem solução.

Resposta: nenhuma

37) I) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3 \Leftrightarrow \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\operatorname{sen}^2x + \cos^2x}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \,.\, \cos x = \dfrac{1}{3}$

II) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x = 2 \,.\, \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Resposta: $\dfrac{2}{3}$

38) I) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) . \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) . \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) =$

$= 0 \,.\, \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - (-1) \,.\, \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

II) Sendo $\cos(2a) = 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2a$, fazendo $a = \dfrac{x}{2}$, temos:

$\cos x = 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

III) Para $\cos x = \dfrac{3}{5}$, temos:

$\dfrac{3}{5} = 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \,.\, \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Assim, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Resposta: $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

39) I) $\dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{12\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = 4\pi + \dfrac{2\pi}{3} = 2 \,.\, 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$

II) $y = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{14\pi}{3}\right) =$

$= -\left[\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right] + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) =$

$= -\cos\left(2 \,.\, \dfrac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{3} =$

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

40) $y = \operatorname{sen} a \,.\, \cos^3a + \operatorname{sen}^3a \,.\, \cos a =$

$= \operatorname{sen} a \,.\, \cos a \,.\, (\cos^2a + \operatorname{sen}^2a) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos a =$

$= \dfrac{2 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \cos a}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}(2a)}{2} = \dfrac{1}{2} \,.\, \operatorname{sen}(2a)$

Resposta: C

41) Lembrando que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ e $\sec^2x = 1 + \operatorname{tg}^2x$, para $\operatorname{tg} x = t$, tem-se:

a) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x = 2 \,.\, \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \,.\, \cos^2x =$

$= 2 \,.\, \operatorname{tg} x \,.\, \dfrac{1}{\sec^2x} = 2 \,.\, \operatorname{tg} x \,.\, \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2x} = \dfrac{2 \,.\, t}{1 + t^2}$

b) Se $\cos(2x) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, então:

$\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) = 1 \Rightarrow \dfrac{2t}{1 + t^2} + \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow$

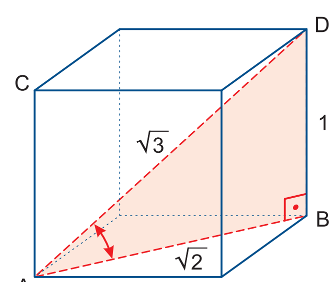
$\Leftrightarrow 2t\,(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0$ ou $\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = n \,.\, \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + n \,.\, \pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

Respostas: a) $\dfrac{2 \,.\, t}{1 + t^2}$

b) $x = n \,.\, \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + n \,.\, \pi$, $n \in \mathbb{Z}$

42) a)

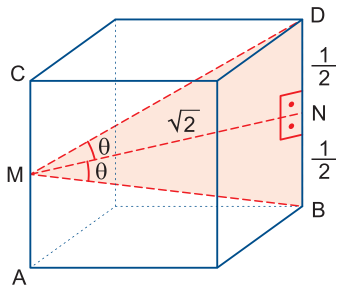


O triângulo ABD é retângulo em B, e tal que:

$$\begin{cases} BD = a = 1 \\ AB = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \\ AD = a\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Portanto, $\cos B\hat{A}D = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) Sendo M o ponto médio de $\overline{AC}$ e N o ponto médio de $\overline{BD}$, tem-se que os triângulos MNB e MND são congruentes e retângulos em N.



No triângulo MNB, temos:

$$MN = \sqrt{2},\ NB = \frac{1}{2} \text{ e } MB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

Assim, $\cos B\hat{M}N = \cos\theta = \dfrac{MN}{MB} = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

e $\cos B\hat{M}D = \cos(2\theta) = 2.\cos^2\theta - 1 = 2 \cdot \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{9}$.

c) Como $\begin{cases} \cos B\hat{A}D = \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{54}}{9} \\ \cos B\hat{M}D = \dfrac{7}{9} = \dfrac{\sqrt{49}}{9} \end{cases}$ tem-se:

$\cos B\hat{A}D > \cos B\hat{M}D \Rightarrow B\hat{A}D < B\hat{M}D$, pois a função cosseno é decrescente para ângulos agudos.

Respostas: a) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\dfrac{7}{9}$

c) $\cos B\hat{A}D > \cos B\hat{M}D \Rightarrow B\hat{A}D < B\hat{M}D$, pois a função cosseno é decrescente para ângulos agudos.

43) a) $\text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha + \alpha) =$

$= \text{sen}\, 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha =$

$= 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha + (1 - 2\,\text{sen}^2\alpha) \cdot \text{sen}\,\alpha =$

$= 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\alpha) + \text{sen}\,\alpha - 2 \cdot \text{sen}^3\alpha =$

$= 2\,\text{sen}\,\alpha - 2 \cdot \text{sen}^3\alpha + \text{sen}\,\alpha - 2 \cdot \text{sen}^3\alpha =$

$= 3 \cdot \text{sen}\,\alpha - 4 \cdot \text{sen}^3\alpha$

b) Sendo $0 < \alpha < \pi$, temos $\text{sen}\,\alpha > 0$ e, portanto:

$\text{sen}(3\alpha) > 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow 3 \cdot \text{sen}\,\alpha - 4 \cdot \text{sen}^3\alpha > 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \cdot \text{sen}^3\alpha - \text{sen}\,\alpha < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha \cdot (2 \cdot \text{sen}\,\alpha + 1) \cdot (2 \cdot \text{sen}\,\alpha - 1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \text{sen}\,\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$

Assim:

$$V = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < \alpha < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi\right\}$$

Respostas: a) $\text{sen}(3\alpha) = 3 \cdot \text{sen}\,\alpha - 4 \cdot \text{sen}^3\alpha$

b) $\left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} < \alpha < \pi\right\}$

44) $\cos(3x) = 4 \cdot \cos^3(x) - 3 \cdot \cos(x)$

Fazendo $x = 20°$ na igualdade acima, obtemos:

$\cos(60°) = 4 \cdot \cos^3(20°) - 3 \cdot \cos(20°) \therefore$

$4 \cdot \cos^3(20°) - 3 \cdot \cos(20°) - (1/2) = 0$

Portanto, $\cos(20°)$ é raiz da equação $4x^3 - 3x - (1/2) = 0$. Para as raízes racionais desta equação, temos as seguintes possibilidades: ± 1; $\pm 1/2$; $\pm 1/4$; $\pm 1/8$. Testando estes oito valores, vemos que nenhum deles é raiz. Portanto, a equação $4x^2 - 3x - (1/2) = 0$ não possui raiz racional e como $\cos(20°)$ é uma das raízes desta equação, não pode ser racional.

45) a) $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) =$

$= \cos(2\theta) \cdot \cos\theta - \text{sen}(2\theta) \cdot \text{sen}\,\theta =$

$= (2\cos^2\theta - 1) \cdot \cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\,\theta =$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\,\text{sen}^2\theta \cdot \cos\theta =$

$= \cos\theta \cdot (2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta - 1)$

b) $\text{sen}(3\theta) = \text{sen}(2\theta + \theta) =$

$= \text{sen}(2\theta) \cdot \cos\theta + \cos(2\theta) \cdot \text{sen}\,\theta =$

$= 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta + (1 - 2\,\text{sen}^2\theta) \cdot \text{sen}\,\theta =$

$= 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - 2\,\text{sen}^3\theta =$

$= \text{sen}\,\theta \cdot (2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta + 1)$

c) Para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$$\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2} \cdot \cos\theta + 1 = \frac{\text{sen}(3\theta)}{\text{sen}\,\theta} - \frac{\cos(3\theta)}{\cos\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\theta + \frac{1}{2} \cdot \cos\theta + 1 =$$

$$= \frac{\text{sen}\,\theta \cdot (2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta + 1)}{\text{sen}\,\theta} -$$

$$- \frac{\cos\theta \cdot (2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta - 1)}{\cos\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2\theta + \frac{1}{2} \cdot \cos\theta + 1 =$$

$$= 2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta + 1 - 2\cos^2\theta + 2\,\text{sen}^2\theta + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta - \frac{1}{2} \cdot \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta \cdot \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}, \text{ pois } \cos\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Respostas: a) $\cos(3\theta) = \cos\theta \cdot (2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta - 1)$

b) $\text{sen}\,(3\theta) = \text{sen}\,\theta \cdot (2\cos^2\theta - 2\,\text{sen}^2\theta + 1)$

c) $\frac{\pi}{3}$

46) $\begin{vmatrix} 6\cos x & \text{tg}\,x \\ \text{sen}\,2x & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - (\text{tg}\,x) \cdot (\text{sen}\,2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 x - \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \cdot 2\,\text{sen}\,x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6\cos^2 x = 2\,\text{sen}^2 x \Leftrightarrow \text{tg}^2 x = 3$, então:

$\sec^2 x = \text{tg}^2 x + 1 = 3 + 1 = 4$

Resposta: A

FRENTE 4 – GEOMETRIA PLANA E ÁLGEBRA

■ Módulo 5 – Ângulos na Circunferência e Potência de Ponto

1) $x = \frac{130°}{2} = 65°$, pois x é um ângulo inscrito.

Resposta: C

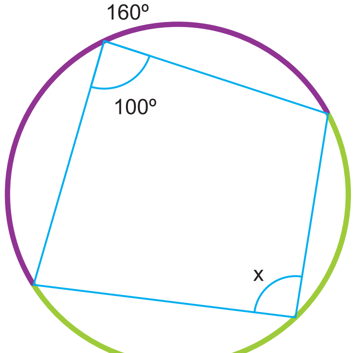
2) $x = \frac{90° + 40°}{2} = 65°$, pois x é um ângulo excêntrico interior.

Resposta: C

3) $x = \frac{100° - 30°}{2} = 35°$, pois x é um ângulo excêntrico exterior.

Resposta: A

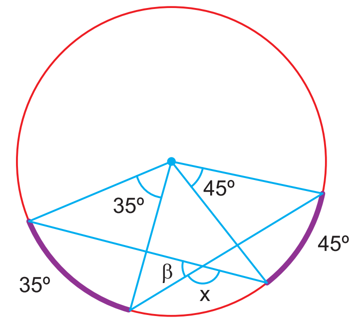
4)



$x = \frac{160°}{2} = 80°$

Resposta: D

5)

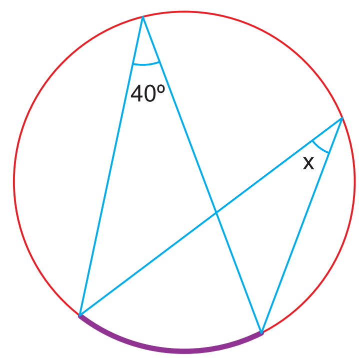


I) $\beta = \frac{35° + 45°}{2} = 40°$

II) $\beta + x = 180° \Rightarrow 40° + x = 180° \Leftrightarrow x = 140°$

Resposta: E

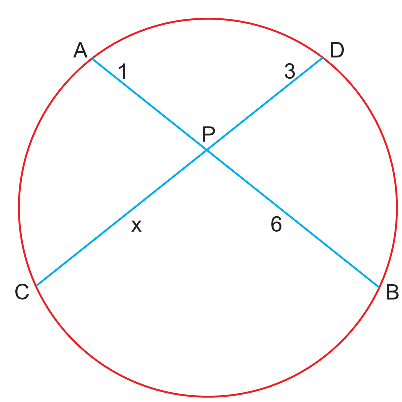
6)



$x = \frac{80°}{2} = 40°$

Resposta: B

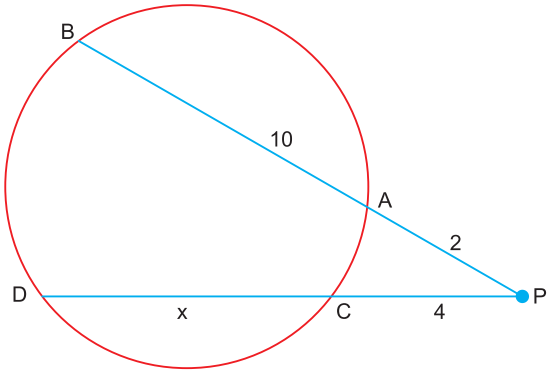
7)



$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 1 \cdot 6 = x \cdot 3 \Leftrightarrow x = 2$

Resposta: C

8)



$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 2 \cdot 12 = 4 \cdot (4 + x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 = 4 + x \Leftrightarrow x = 2$

Resposta: C

9) $(AB)^2 = AC \cdot AD \Rightarrow 8^2 = x \cdot (x + x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$, pois $x > 0$

Resposta: E

10) Considerando que $\overline{PA}$ é tangente à circunferência no ponto A e $PA = 3 \cdot PC$, então:

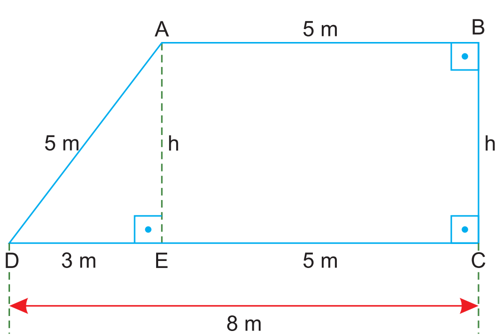
$(PA)^2 = PC \cdot PB \Rightarrow (3 \cdot PC)^2 = PC \cdot PB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 \cdot (PC)^2 = PC \cdot PB \Leftrightarrow 9 \cdot PC = PB$

Resposta: B

■ Módulo 6 – Área das Figuras Planas

1)



I) $CE = AB = 5m \Rightarrow DE = 3\ m$

II) No triângulo ADE, tem-se:

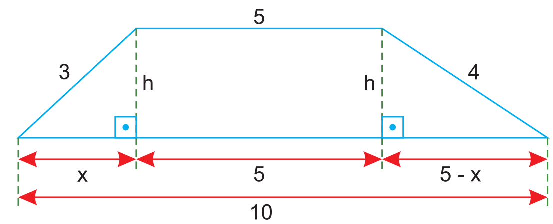
$(3\ m)^2 + h^2 = (5\ m)^2 \Rightarrow h = 4\ m$

III) A área do trapézio é:

$$S = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2} = \frac{(5\ m + 8\ m) \cdot 4m}{2} = 26\ m^2$$

Resposta: A

2) Considerando as medidas em centímetros, tem-se:



I) $\begin{cases} x^2 + h^2 = 3^2 \\ (5 - x)^2 + h^2 = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ 25 - 10x + x^2 + h^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ -10x + x^2 + h^2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ -10x + 9 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = 9 \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{81}{25} + h^2 = 9 \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 9 - \dfrac{81}{25} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = \dfrac{144}{25} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \dfrac{12}{5} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases}$

II) A área do trapézio, em centímetros quadrados, é:

$$S = \frac{(10 + 5) \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{15 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18$$

Resposta: A

3) I) Sendo $S = 16\sqrt{3}\ m^2$ a área do triângulo equilátero de lado L, em metros, tem-se:

$$S = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow L^2 = 64 \Rightarrow L = 8$$

II) A altura h, em metros, do triângulo equilátero, é dada por:

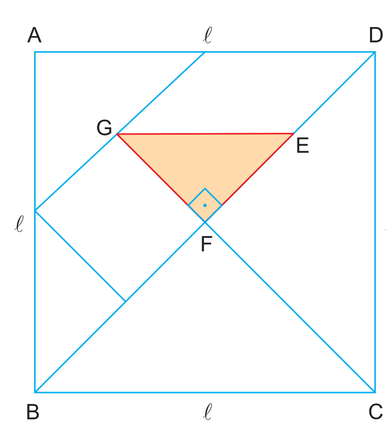
$$h = \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

III) Sendo A a área do quadrado, em metros quadrados, cuja diagonal, em metros, é $d = h = 4\sqrt{3}$, tem-se:

$$A = \frac{d^2}{2} = \frac{(4\sqrt{3})^2}{2} = \frac{16 \cdot 3}{2} = 24$$

Resposta: B

4)



I) A área do quadrado ABCD é 4 cm^2, assim, a medida do lado quadrado é $\ell = 2$ cm

II) $BD = \ell\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm é a diagonal do quadrado

III) $EF = FG = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4}$ cm $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cm

IV) A área do triângulo EFG é dada por

$$\frac{EF \, . \, FG}{2} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \, . \, \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} \, cm^2 = \frac{\dfrac{2}{4}}{2} \, cm^2 =$$

$$\frac{\dfrac{1}{2}}{2} \, cm^2 = \frac{1}{4} \, cm^2$$

Resposta: E

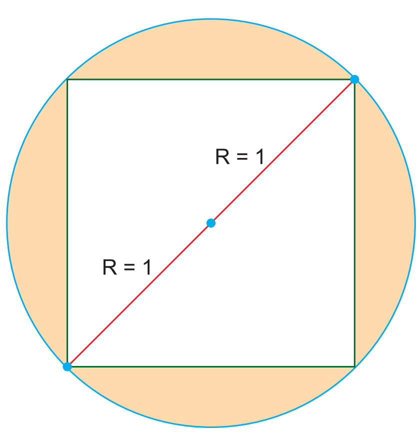
5) A área sombreada S corresponde à diferença entre a área de um quadrado de lado $\ell = 2$ e $\dfrac{1}{4}$ da área de um círculo de raio R = 2, assim:

$$S = \ell^2 - \frac{1}{4} \, . \, \pi \, . \, R^2 = 2^2 - \frac{1}{4} \, . \, \pi \, . \, 2^2 = 4 - \pi$$

Resposta: A

6) A área S da coroa circular sombreada, em cm^2, corresponde à diferença entre a área do círculo maior, de raio 5 cm, e a do círculo menor, de raio 3 cm, assim:
$S = \pi \, . \, 5^2 - \pi \, . \, 3^2 = 25\pi - 9\pi = 16\pi$
Resposta: C

7)



I) A diagonal do quadrado é d = 2R = 2

II) A área pedida S corresponde à diferença entre a área do círculo de raio R = 1 e a do quadrado de diagonal d = 2, assim:

$$S = \pi \, . \, R^2 - \frac{d^2}{2} = \pi \, . \, 1^2 - \frac{2^2}{2} = \pi - 2$$

Respostas: D

8) I) Se o lado do quadrado ABCD mede 2 cm, o raio do círculo, em centímetros, é $R = \dfrac{2}{2} = 1$

II) A diagonal do quadrado menor, em centímetros, é d = 2R = 2

III) A área pedida S, em centímetros quadrados, corresponde à diferença entre a área do círculo de raio R = 1 e a do quadrado de diagonal d = 2, assim:

$$S = \pi \, . \, R^2 - \frac{d^2}{2} = \pi \, . \, 1^2 - \frac{2^2}{2} = \pi - 2$$

Resposta: D

9) A área S da parte sombreada corresponde à área do quadrado menor, cuja diagonal mede d = 2a, assim:

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{(2a)^2}{2} = \frac{4a^2}{2} = 2a^2$$

Resposta: C

10) I) A área do quadrado ABCD, em cm^2, é $S_1 = 12^2 = 144$

II) $AE = AF = \dfrac{12}{3} = 4$, em cm.

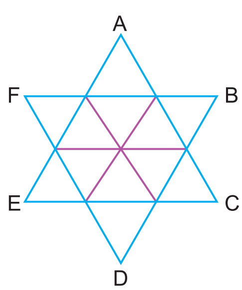
III) A área do triângulo AEF, em cm^2, é

$$S_2 = \frac{AE \, . \, AF}{2} = \frac{4 \, . \, 4}{2} = 8$$

IV) A área S do octógono, em centímetros quadrados, é:
$S = S_1 - 4 \, . \, S_2 = 144 - 4 \, . \, 8 = 144 - 32 = 112$

Resposta: D

11)

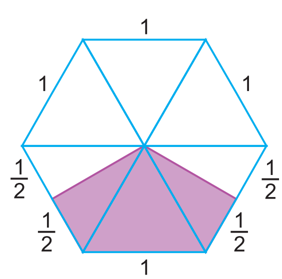


I) Se *a* é a área de cada um dos 6 triângulos equiláteros que formam o hexágono central de área k, então, k = 6a.

II) A soma das áreas dos triângulos ACE e BDF é
9a + 9a = 18a = 3 . 6a = 3k

Resposta: C

12)

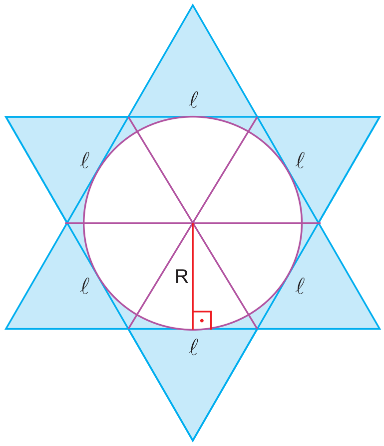


O pentágono hachurado tem área S correspondente a dois triângulos equiláteros de lado 1, assim, tem-se:

$$S = 2 \, . \, \frac{1^2 \, . \, \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: E

13)



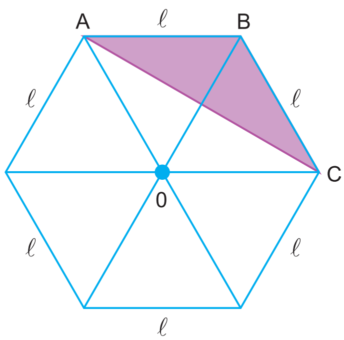
I) $\ell = 2 \Rightarrow R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

II) $S = 12 \cdot \dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \pi \cdot R^2 = 12 \cdot \dfrac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 3 \cdot (\sqrt{3})^2 =$

$= 12 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 3 = 3 \cdot (4 \cdot \sqrt{3} - 3)$

Resposta: B

14)

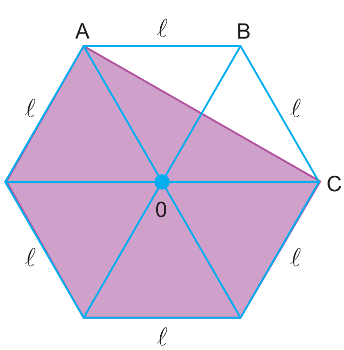


I) $S_{HEX} = 6 \cdot S_{OAB} \Rightarrow 6 = 6 \cdot S_{OAB} \Leftrightarrow S_{OAB} = 1$

II) $S_{ABC} = \dfrac{S_{OAB} + S_{OBC}}{2} = \dfrac{2 \cdot S_{OAB}}{2} = S_{OAB} = 1$

Resposta: A

15)



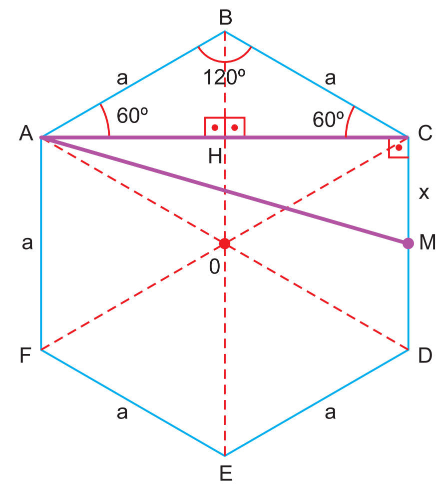
I) $S_{HEX} = 6 \cdot S_{OAB} \Rightarrow 2 = 6 \cdot S_{OAB} \Leftrightarrow S_{OAB} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

II) $S_{ABC} = \dfrac{S_{OAB} + S_{OBC}}{2} = \dfrac{2 \cdot S_{OAB}}{2} = S_{OAB} = \dfrac{1}{3}$

III) $S_{PENT} = S_{HEX} - S_{ABC} = 2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

Resposta: E

16)



I) $AH = HC = \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2 \cdot \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = a \cdot \sqrt{3}$

II) $S_{ABC} = \dfrac{S_{OAB} + S_{OBC}}{2} = \dfrac{2 \cdot S_{OAB}}{2} = S_{OAB} = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

III) $S_{ACM} = \dfrac{x \cdot AC}{2} = \dfrac{x \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2}$

IV) $S_{ABCM} = \dfrac{1}{4} \cdot S_{HEX} \Rightarrow S_{ABC} + S_{ACM} = \dfrac{1}{4} \cdot S_{HEX} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \dfrac{x \cdot a \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{4} \cdot 6 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{4} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3a}{8} \Leftrightarrow 2a + 4x = 3a \Leftrightarrow 4x = a \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$

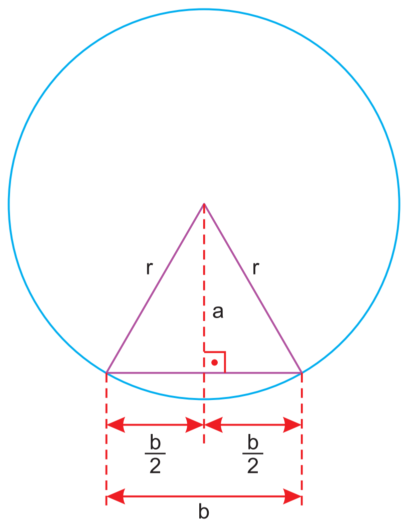
V) Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACM, temos:

$(AM)^2 = (AC)^2 + x^2 = (a \cdot \sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{16} = \dfrac{49a^2}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \dfrac{7a}{4}$

Resposta: B

17) I) O polígono regular de n lados é formado por n triângulos isósceles congruentes, como o da figura a seguir:



II) Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = \sqrt{r^2 - a^2} \Leftrightarrow b = 2 . \sqrt{r^2 - a^2}$$

III) A área do polígono de n lados é dada por

$$n . \frac{b . a}{2} = n . \frac{2 . \sqrt{r^2 - a^2} . a}{2} = na\sqrt{r^2 - a^2}$$

Resposta: C

18) Sendo R o raio do círculo maior (figura I) e r o raio de cada círculo menor (figura II), tem-se:

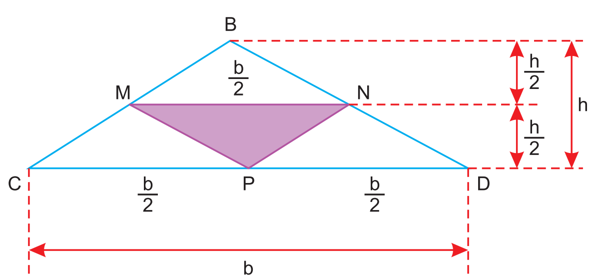
I) $2 . \pi . R = 3 . 2 . \pi . r \Leftrightarrow R = 3 . r$

II) $s = \pi . r^2$

III) $S = \pi . R^2 = \pi . (3 . r)^2 = \pi . 9 . r^2 = 9 . \pi . r^2 = 9 . s$

Resposta: E

19)



I) $\begin{cases} \text{M é ponto médio de } \overline{BC} \\ \text{N é ponto médio de } \overline{BD} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{CD} \text{ e } MN = \frac{CD}{2} = \frac{b}{2}$$

II) A área do triângulo BCD é $A = \dfrac{b . h}{2}$

III) A área do triângulo MNP é $\dfrac{MN . \frac{h}{2}}{2} = \dfrac{\frac{b}{2} . \frac{h}{2}}{2} =$

$$= \frac{\frac{b . h}{4}}{2} = \frac{b . h}{8} = \frac{1}{4} . \frac{b . h}{2} = \frac{1}{4} . A$$

Resposta: C

20) I) $S_{ABC} = 2 . S_{ADE} \Leftrightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 2$

II) Se a razão de semelhança entre duas figuras semelhantes é k, a razão entre as áreas dessas figuras é k^2, então:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2 \Rightarrow 2 = \left(\frac{BC}{DE}\right)^2 \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \sqrt{2}$$

Resposta: D

■ Módulo 7 – Fatorial e Número Binomial

1) $\dfrac{21!}{19!} = \dfrac{21 . 20 . 19!}{19!} = 21 . 20 = 420$

Resposta: C

2) $\dfrac{21! - 20!}{19!} = \dfrac{21 . 20 . 19! - 20 . 19!}{19!} = \dfrac{20 . 19! . (21 - 1)}{19!} =$

$= 20 . 20 = 400$

Resposta: D

3) $\dfrac{(n + 1)!}{(n - 1)!} = \dfrac{(n + 1) . n . (n - 1)!}{(n - 1)!} = (n + 1) . n = n^2 + n$

Resposta: C

4) $(n + 4)! + (n + 3)! = 15 . (n + 2)! \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n + 4) . (n + 3) . (n + 2)! + (n + 3) . (n + 2)! = 15 . (n + 2)! \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n + 4) . (n + 3) + (n + 3) = 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 4n + 12 + n + 3 = 15 \Leftrightarrow n^2 + 8n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n . (n + 8) = 0 \Rightarrow n = 0$, pois $n \geq -2$

Resposta: E

5) $\dbinom{200}{198} = \dfrac{200!}{198! . 2!} = \dfrac{200 . 199 . 198!}{198! . 2 . 1} = 100 . 199 = 19\,900$

Resposta: A

6) Se $2\dbinom{x+1}{4} = 7\dbinom{x-1}{2}$, podemos ter:

I) $\dbinom{x+1}{4} = \dbinom{x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x + 1 < 4 \\ x - 1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

II) Para $x \geq 3$, tem-se:

$$2 . \frac{(x + 1)!}{4!(x - 3)!} = 7 . \frac{(x - 1)!}{2!(x - 3)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 . (x + 1) . x . (x - 1)!}{4 . 3 . 2 . 1} = \frac{7 . (x - 1)!}{2 . 1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\,.\,x}{4\,.\,3} = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\,.\,x}{2\,.\,3} = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 42 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow x = 6$, pois $x \geq 3$

Resposta: $V = \{1; 2; 6\}$

7) $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{p} \neq 0 \Leftrightarrow k = p$ ou $k + p = n$, pois se $k + p = n$ os números binomiais são complementares.

Resposta: E

8) $\dbinom{14}{5-x} = \dbinom{14}{5x-7} \neq 0 \Leftrightarrow 5 - x = 5x - 7$ ou

$5 - x + 5x - 7 = 14 \Leftrightarrow 6x = 12$ ou $4x = 16 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$

Resposta: $V = \{2; 4\}$

9)

$$\begin{array}{l} \dbinom{20}{0}\dbinom{20}{1}\dots\dbinom{20}{13}\dbinom{20}{14}\dots\dbinom{20}{20} \\ \dbinom{21}{0}\dbinom{21}{1}\dots\dbinom{21}{13}\dbinom{21}{14}\dots\dbinom{21}{20}\dbinom{21}{21} \end{array}$$

Utilizando a Relação de Stifel, observando as duas linhas do Triângulo de Pascal acima, tem-se:

$\dbinom{20}{13} + \dbinom{20}{14} = \dbinom{21}{14}$

Resposta: C

10)

$$\begin{array}{l} \dbinom{m-1}{0}\dbinom{m-1}{1}\dots\dbinom{m-1}{p-1}\dbinom{m-1}{p}\dots\dbinom{m-1}{m-1} \\ \dbinom{m}{0}\;\;\dbinom{m}{1}\;\dots\dbinom{m}{p-1}\;\dbinom{m}{p}\;\dots\dbinom{m}{m-1}\dbinom{m}{m} \end{array}$$

I) $\dbinom{m}{p}$ e $\dbinom{m}{m-p}$ são números binomiais complementares, pois $p + m - p = m$, então, $\dbinom{m}{p} = \dbinom{m}{m-p} = 55$

II) Utilizando a Relação de Stifel, observando as duas linhas do Triângulo de Pascal acima, tem-se:

$\dbinom{m-1}{p-1} + \dbinom{m-1}{p} = \dbinom{m}{p} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 + \dbinom{m-1}{p} = 55 \Leftrightarrow \dbinom{m-1}{p} = 45$

Resposta: B

11) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$, pois é a soma de todos os números binomiais da linha 4.

Resposta: 16

12) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \binom{6}{k} = \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} =$

$= 2^6 - \dbinom{6}{0} - \dbinom{6}{6} = 64 - 1 - 1 = 62$

Resposta: 62

13) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} \binom{k}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} =$

$= \dfrac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3!}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,3!} = 5\,.\,4 = 20$, pois é a soma dos primeiros elementos da coluna 2, e o resultado localiza-se na linha seguinte $(5 + 1 = 6)$ e na coluna seguinte $(2 + 1 = 3)$, em relação ao último binomial somado.

Resposta: 20

14) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{k+2}{k} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} = \binom{7}{4} =$

$= \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{4!\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 7\,.\,5 = 35$, pois é a soma dos primeiros elementos de uma diagonal, e o resultado localiza-se abaixo do último binomial somado.

Resposta: 35

15) $\displaystyle\sum_{p=4}^{10} \binom{p}{4} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{10}{4} = \binom{11}{5} =$

$= \dfrac{11!}{5!6!} = \dfrac{11\,.\,10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6!}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.\,6!} = 462$

Resposta: 462

16) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 512 \Leftrightarrow \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m} = 512 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^m = 2^9 \Leftrightarrow m = 9$

Resposta: E

17) I) Os coeficientes da linha 4 do triângulo de Pascal são 1, 4, 6, 4 e 1.

II) $(x - y)^4 = 1x^4y^0 - 4x^3y^1 + 6x^2y^2 - 4x^1y^3 + 1x^0y^4 =$
$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

18) I) Os coeficientes da linha 6 do Triângulo de Pascal são 1, 6, 15, 20, 15, 6 e 1

II) $(x - 2)^6 = 1x^6 2^0 - 6x^5 2^1 + 15x^4 2^2 - 20x^3 2^3 + 15x^2 2^4 - 6x^1 2^5 +$
$+ 1x^0 2^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

19) I) No desenvolvimento de $(x^2 + 2)^{10}$, com expoentes decrescentes de x, o termo geral é $T_{k+1} = \dbinom{10}{k}\,.\,(x^2)^{10-k}\,.\,2^k$

II) Fazendo $k = 3$, obtém-se o 4º termo, assim:

$T_4 = \dbinom{10}{3}\,.\,(x^2)^{10-3}\,.\,2^3 = 120\,.\,x^{14}\,.\,8 = 960\,.\,x^{14}$

Resposta: $960x^{14}$

20) I) No desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{3}{2}\right)^4$, o termo geral é

$T_{k+1} = \dbinom{4}{k}\,.\,(x^2)^{4-k}\,.\left(\dfrac{3}{2}\right)^k = \dbinom{4}{k}\,.\,x^{8-2k}\,.\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$

II) Para obter o termo em x^4, devemos ter $8 - 2k = 4 \Leftrightarrow k = 2$, assim:

$T_3 = \dbinom{4}{2}\,.\,x^{8-2\,.\,2}\,.\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 6\,.\,x^4\,.\,\dfrac{9}{4} = \dfrac{27}{2}\,.\,x^4$

Resposta: A

21) I) No desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{12}$, o termo geral é

$$T_{k+1} = \binom{12}{k} . (x^2)^{12-k} . (x^{-3})^k = \binom{12}{k} . x^{24-2k} . x^{-3k} =$$

$$= \binom{12}{k} . x^{24-5k}$$

II) Para obter o termo em x^2, devemos ter $24 - 5k = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k = \dfrac{22}{5}$, assim, não existe o termo pedido, pois $k \notin \mathbb{N}$.

Observe que k deve ser um número natural entre 0 e 12 para que se tenha o binomial $\binom{12}{k} \neq 0$

Resposta: não existe

22) I) No desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{4}{3x}\right)^{8}$, o termo geral é

$$T_{k+1} = \binom{8}{k} . x^{8-k} . \left(\frac{4}{3x}\right)^k = \binom{8}{k} . x^{8-k} . 4^k . 3^{-k} . x^{-k} =$$

$$= \binom{8}{k} . 4^k . 3^{-k} . x^{8-2k}$$

II) Para obter o termo independente de x, isto é, o termo com x^0, devemos ter $8 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$, assim, o termo é $T_{k+1} = T_5$ (5º termo)

Resposta: D

23) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x + 2y)^5$ é obtida fazendo x = 1 e y = 1, assim:
$S = (3 . 1 + 2 . 1)^5 = (3 + 2)^5 = 5^5 = 3125$
Resposta: 3125

24) A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x - y)^{104}$ é obtida fazendo x = 1 e y = 1, assim:
$S = (1 - 1)^{104} = 0^{104} = 0$
Resposta: C

■ Módulo 8 – Arranjos Simples e Permutações Simples

1) Já que os livros são diferentes, o número de maneiras de distribuir esses livros é $A_{42,2} = 42 . 41 = 1722$
Resposta: B

2) Existem 10 maneiras para escolher o coordenador, 9 maneiras para o secretário e 8 para o digitador, assim, o número de equipes é 10 . 9 . 8 = 720 ou $A_{10;\,3} = 10 . 9 . 8 = 720$
Resposta: E

3) Números de 3 algarismos são do tipo | C | D | U |.

Dispondo dos algarismos de 0 a 9, sem repetição, para formar números *maiores que 500*, o número de possibilidades é:
I) 5 para C (5, 6, 7, 8 ou 9)
II) 9 para D (deve ser diferente de C)
III) 8 para U (deve ser diferente de C e de D)
Assim, a quantidade pedida é 5 . 9 . 8 = 360
Resposta: 360

4) Números de 4 algarismos são do tipo | M | C | D | U |.
Dispondo dos algarismos de 0 a 9, sem repetição, para formar números *ímpares*, o número de possibilidades é:
I) 5 para U (1, 3, 5, 7 ou 9)
II) 8 para M (deve ser diferente de U e diferente de zero)
III) 8 para C (deve ser diferente de U e de M)
IV) 7 para D (deve ser diferente de U, de M e de C)
Assim, a quantidade pedida é 5 . 8 . 8 . 7 = 2240
Resposta: 2240

5) Números de 4 algarismos são do tipo | M | C | D | U |.
Dispondo dos algarismos de 0 a 9, sem repetição, para formar números *pares*, existem duas situações:
I) Se o número *terminar com zero*, o número de possibilidades é 9 para M, 8 para C e 7 para D, totalizando 9 . 8 . 7 = 504.
II) Se o número *não terminar com zero*, o número de possibilidades é 4 para U (2, 4, 6 ou 8), 8 para M (deve ser diferente de U e diferente de zero), 8 para C e 7 para D, totalizando 4 . 8 . 8 . 7 = 1792
Assim, a quantidade pedida é 504 + 1792 = 2296
Resposta: 2296

6) Dispondo dos algarismos 1, 2, 3 e 4, sem repetição, podem ser formados:
I) Números com 1 algarismo, num total de 4
II) Números com 2 algarismos, num total de 4 . 3 = 12
III) Números com 3 algarismos, num total de 4 . 3 . 2 = 24
IV) Números com 4 algarismos, num total de 4 . 3 . 2 . 1 = 24
Assim, a quantidade pedida é 4 + 12 + 24 + 24 = 64
Resposta: E

7) Com 14 clubes de futebol, o número de possibilidades para escolher o time que joga no seu campo é 14 e o número de maneiras para escolher o seu adversário é 13. Assim, o total de jogos é 14 . 13 = 182 ou $A_{14,2} = 14 . 13 = 182$
Resposta: 182

8) A palavra VESTIBULAR tem 10 letras, assim, o número de anagramas é $P_{10} = 10! = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 3\,628\,800$
Resposta: 3 628 800

Questões 9 a 16:
A palavra ALIMENTO tem 8 letras.

9) O número de anagramas que começam com M é
$P_7 = 7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040$
Resposta: 5040

10) O número de anagramas que terminam com O é
$P_7 = 7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040$
Resposta: 5040

11) **O número de anagramas que começam com M e terminam com L é $P_6 = 6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$**
Resposta: 720

12) **O número de anagramas que começam com uma vogal é $4 . P_7 = 4 . 7! = 4 . 5040 = 20\,160$**
Resposta: 20 160

13) **O número de anagramas que terminam com uma consoante é $4 . P_7 = 4 . 7! = 4 . 5040 = 20\,160$**
Resposta: 20 160

14) **O número de anagramas que começam com vogal e terminam com consoante é $4 . 4 . P_6 = 4 . 4 . 6! = 4 . 4 . 720 = 11520$**
Resposta: 11520

15) **O número de anagramas que começam e terminam com vogal é $4 . 3 . P_6 = 4 . 3 . 6! = 4 . 3 . 720 = 8640$**
Resposta: 8640

16) **I) Começam com vogal, 20160 anagramas (Ex. 40).**
II) Terminam em consoante, 20160 anagramas (Ex. 41).
III) Começam com vogal *e* terminal em consoante, 11520 anagramas (ex. 42).
IV) Começam com vogal *ou* terminam em consoante, um total de 20160 + 20160 – 11520 = 28 800 anagramas.
Resposta: 28 800

17) **Dos 6 vagões do trem, um deles é o restaurante, assim, após a locomotiva deve ser colocado um dos outros 5 vagões. Para as demais posições não há restrições, logo, pode-se permutar os 4 vagões restantes com o restaurante. Portanto, o número de maneiras de montar a composição é**
$5 . P_5 = 5 . 5! = 5 . 120 = 600$
Resposta: D

18) **Existem 3 formas de escolher o banco em que a família Souza irá sentar e P_3 formas de posicioná-la nesse banco.**
Existem 2 formas de escolher, entre os bancos que sobraram, aquele em que o casal Lúcia e Mauro senta. Para cada um desses bancos existem duas formas de posicionar o casal (à esquerda ou à direita do banco, por exemplo) e, para cada uma dessas formas, P_2 maneiras de o casal trocar de lugar entre si.
Existem P_4 formas de posicionar as quatro outras pessoas.
Assim, no total, temos:
$3 . P_3 . 2 . 2 . P_2 . P_4 = 12 . 3! . 2! . 4! = 3456$ maneiras distintas de dispor os passageiros no lotação.
Resposta: E