CADERNO 1 – SEMIEXTENSIVO D

FRENTE 1 – ÁLGEBRA

■ Módulos 1 e 2 – Equação do 1º e do 2º Grau

1) $3x - [2 - (x - 1)] = 5x \Leftrightarrow 3x - [2 - x + 1] = 5x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x - 2 + x - 1 = 5x \Leftrightarrow 3x + x - 5x = 2 + 1 \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$
Resposta: $V = \{-3\}$

2) $3(x - 2) - x = 2x - 6 \Leftrightarrow 3x - 6 - x = 2x - 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x - x - 2x = 6 - 6 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow V = \mathbb{R}$
Resposta: $V = \mathbb{R}$

3) $2(x - 7) = x - (2 - x) \Leftrightarrow 2x - 14 = x - 2 + x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - x - x = 14 - 2 \Leftrightarrow 0x = 12 \Leftrightarrow V = \varnothing$
Resposta: $V = \varnothing$

4) $$(x^2 + 1)(x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$
Resposta: $V = \{1; -1\}$

5) $2x - [1 - (x - 2)] = 3 \Leftrightarrow 2x - [1 - x + 2] = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - 1 + x - 2 = 3 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$
Resposta: $V = \{2\}$

6) $$3x - \frac{x + 3}{2} = 5 - \frac{x - 2}{3} \Leftrightarrow 18x - 3(x + 3) = 30 - 2(x - 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18x - 3x - 9 = 30 - 2x + 4 \Leftrightarrow 17x = 43 \Leftrightarrow x = \frac{43}{17}$$
Resposta: C

7) Sendo x, em reais, a quantia inicial, tem-se:
I) Após o 1º milagre, a pessoa ficou com $2x$
II) Após a 1ª doação, a pessoa ficou com $2x - 20\,000$
III) Após o 2º milagre, a pessoa ficou com $2 \cdot (2x - 20\,000)$
IV) Após a 2ª doação, a pessoa ficou com
$2 \cdot (2x - 20\,000) - 20\,000$
V) $2 \cdot (2x - 20\,000) - 20\,000 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x - 40\,000 - 20\,000 = 0 \Leftrightarrow 4x = 60\,000 \Leftrightarrow x = 15\,000$
Resposta: R$ 15 000,00

8) Sendo x, em anos, a idade atual, tem-se:
$$x = \frac{x + 20}{2} - \frac{x - 5}{3} \Leftrightarrow 6x = 3 \cdot (x + 20) - 2 \cdot (x - 5) \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 6x = 3x + 60 - 2x + 10 \Leftrightarrow 5x = 70 \Leftrightarrow x = 14$
Resposta: B

9) Na equação $6x^2 - x - 1 = 0$, tem-se $a = 6$, $b = -1$ e $c = -1$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$
Resposta: $V = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

10) Na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, tem-se $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$
Resposta: $V = \{2; 3\}$

11) Na equação $x^2 + 4x + 3 = 0$, tem-se $a = 1$, $b = 4$ e $c = 3$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = -1$$
Resposta: $V = \{-3; -1\}$

12) Na equação $6x^2 - 13x + 6 = 0$, tem-se $a = 6$, $b = -13$ e $c = 6$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 144 = 25$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm 5}{12} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$
Resposta: $V = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

13) Na equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, tem-se $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
Resposta: $V = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

14) Na equação $x^2 - 2x + 5 = 0$, tem-se $a = 1$, $b = -2$ e $c = 5$, então:
I) $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$
II) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2a} \notin \mathbb{R}$$
Resposta: $V = \varnothing$

15) $3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x + 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -4$
Resposta: $V = \{-4; 0\}$

16) $x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{49} \Leftrightarrow x = \pm 7$
$V = \{-7; 7\}$

17) $\dfrac{x+2}{2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow (x+2) \,.\, (x-2) + 2 \,.\, 2 = -1 \,.\, (x-2)$, com $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 4 = -x + 2$, com $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, com $x \neq 2 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$

Resposta: E

18) Sendo x, em anos, a idade atual do filho, tem-se:

I) A idade atual do pai, em anos, é $x + 36$

II) $x \,.\, (x + 36) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 + 36x = 4x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow 3 \,.\, x \,.\, (-x + 12) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 12 \Rightarrow x = 12$, pois $x > 0$

III) A idade do pai é $x + 36 = 12 + 36 = 48$ e a idade do filho é $x = 12$

Resposta: B

19) Sendo $S = \dfrac{3k}{k-2}$ e $P = \dfrac{1}{k-2}$ a soma e o produto das raízes, respectivamente, devemos ter $\dfrac{3k}{k-2} = \dfrac{1}{k-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{3}$

Resposta: C

20) Sendo V = {a; b} o conjunto verdade da equação $x^2 - 3k\,x + k^2 = 0$, então:

$$\begin{cases} a + b = 3k \\ a \,.\, b = k^2 \end{cases}$$

$a + b = 3k \Rightarrow (a + b)^2 = (3k)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 9k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{1{,}75} + 2 \,.\, \underbrace{ab}_{k^2} = 9k^2 \Leftrightarrow 1{,}75 + 2k^2 = 9k^2 \Leftrightarrow 7k^2 = 1{,}75 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7k^2 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Resposta: 0,25

21) I) As raízes da equação $x^2 - px + q = 0$ são a e b, então, $a + b = p$ e $a \,.\, b = q$

II) Uma equação do 2º grau que tem raízes $\dfrac{1}{a}$ e $\dfrac{1}{b}$, tem soma das raízes

$S = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{b + a}{a \,.\, b} = \dfrac{p}{q}$ e produto das raízes

$P = \dfrac{1}{a} \,.\, \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a \,.\, b} = \dfrac{1}{q}$

III) A equação procurada pode ser obtida por

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{p}{q} \,.\, x + \dfrac{1}{q} = 0 \Leftrightarrow qx^2 - px + 1 = 0$

Resposta: A

22) I) Sendo m e n as raízes da equação $2x^2 + 7x + 1 = 0$, tem-se $m + n = \dfrac{-7}{2}$ e $m \,.\, n = \dfrac{1}{2}$

II) Uma equação do 2º grau que tem raízes 2m e 2n, tem soma das raízes $S = 2m + 2n = 2 \,.\, (m + n) = 2 \,.\, \left(\dfrac{-7}{2}\right) = -7$

e produto das raízes $P = 2m \,.\, 2n = 4 \,.\, m \,.\, n = 4 \,.\, \dfrac{1}{2} = 2$

III) A equação procurada pode ser obtida por

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 7x + 2 = 0$

Resposta: $x^2 + 7x + 2 = 0$

23) Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, se a e c têm sinais contrários, então:

I) $a \,.\, c < 0 \Leftrightarrow 4ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta > 0$, então, a equação tem duas raízes reais distintas.

II) O produto das raízes é $P = \dfrac{c}{a} < 0$, assim, as raízes têm sinais contrários.

Resposta: A

24) $\dfrac{3}{2(x+2)} = \dfrac{1}{2x-4} - \dfrac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2(x+2)} = \dfrac{1}{2(x-2)} - \dfrac{2}{(x+2).(x-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x - 2) = x + 2 - 2 \,.\, 2$, com $x + 2 \neq 0$ e $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 - 4$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 4$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow x = 2$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ não existe $x \Rightarrow V = \varnothing$

Resposta: C

25) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \,.\, (x^2 + 1) = 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0$ ou $x^2 + 1 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0$ ou $x^2 = -1\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\} = \{0\}$

Resposta: {0}

26) $(x + 1) \,.\, (x - 1) \,.\, (x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x^2 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R} \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Resposta: V = {– 1; 1}

27) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$

Fazendo $x^2 + 1 = y$, temos:

$y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = 5$

Assim:

$x^2 + 1 = 2$ ou $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ ou $x = \pm 2$

Resposta: C

28) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^4)^2 - 15x^4 - 16 = 0$

Fazendo $x^4 = y$, temos:

$y^2 + 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = 16$

Assim:

$x^4 = -1$ ou $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{-1} \notin \mathbb{R}$ ou $x = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2$

Resposta: V = {– 2; 2}

29) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + \ \ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Resposta: V = {(2; 1)}

30) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ -6x - \ \ 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ 11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Resposta: V = {(– 2; 1)}

31) **Se x for o número de cédulas de R$ 5,00 e y for o número de cédulas de R$ 10,00, então:**

$\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 10y = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow x - y = 10$

Resposta: C

32) **Sendo v o número de bolas vermelhas e b o número de bolas brancas, temos:**

$\begin{cases} v + b = 20 \\ b = \dfrac{v + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + \dfrac{v + 1}{2} = 20 \\ v + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2v + v + 1 = 40 \\ v + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3v = 39 \\ v + b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 13 \\ b = 7 \end{cases}$

Resposta: 13 vermelhas e 7 brancas

33) **Sendo j e m as idades atuais, em anos, de João e Maria, respectivamente, temos:**

$\begin{cases} j - 5 = 2 \,.\, (m - 5) \\ j + 5 + m + 5 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j - 5 = 2m - 10 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} j - 2m = -5 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -j + 2m = 5 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 60 \\ j + m = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 20 \\ j = 35 \end{cases} \Rightarrow j - m = 35 - 20 = 15$

Resposta: 15 anos

34) **Sendo n o número de pessas do grupo inicial, temos:**

I) **A parcela inicial seria** $\dfrac{6300}{n}$

II) **A parcela final foi** $\dfrac{6300}{n - 2}$

Assim, devemos ter:

$\dfrac{6300}{n - 2} = \dfrac{6300}{n} + 360 \Leftrightarrow \dfrac{35}{n - 2} = \dfrac{35}{n} + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35n = 35(n - 2) + 2n(n - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 35n = 35n - 70 + 2n^2 - 4n \Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 70 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = -5$ ou $n = 7 \Rightarrow n = 7$, pois $n > 0$

Resposta: E

35) **Sendo x o número de recenseadores e y o número de residências da cidade, temos:**

$\begin{cases} 100 \,.\, x = y - 60 \\ 102 \,.\, x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100x = 102x - 60 \\ y = 102x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 60 \\ y = 102x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 3060 \end{cases}$

Resposta: 3060 residências

36) **Sejam x o número de processos do Dr. André e y o do Dr. Carlos, então:**

$\begin{cases} x + y = 78 \\ x + 2y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -78 \\ x + 2y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 46 \\ y = 32 \end{cases}$

Resposta: D

37) **Sendo m e h, respectivamente, o número de filhas e de filhos do casal, temos:**

$\begin{cases} m = h - 1 \\ h = 2 \,.\, (m - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - h = -1 \\ h = 2m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h - m = 1 \\ -h + 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h - m = 1 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 4 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow h + m = 4 + 3 = 7$

Resposta: E

38) **Sendo a, b e c as idades, em anos, de André, Bento e Carlos, respectivamente, temos:**

$\begin{cases} a + b + c = 41 \\ b = a + 3 \\ c = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + a + 3 + a - 4 = 41 \\ b = a + 3 \\ c = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 42 \\ b = a + 3 \\ c = a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 17 \\ c = 10 \end{cases}$

Resposta: André tem 14 anos, Bento tem 17 anos e Carlos tem 10 anos.

39) **Sendo a e c os "pesos", em gramas, da água que enche o copo e do copo vazio, respectivamente, temos:**

$\begin{cases} c + a = 385 \\ c + \dfrac{2}{3} a = 310 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 385 \\ -c - \dfrac{2}{3} a = -310 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 385 \\ \dfrac{1}{3} a = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + a = 385 \\ a = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 160 \\ a = 225 \end{cases}$

a) **O peso do copo vazio é 160g**

b) **O peso do copo com** $\dfrac{3}{5}$ **de água é**

$c + \dfrac{3}{5} a = \left(160 + \dfrac{3}{5} \,.\, 225\right) g = (160 + 135)g = 295g$

Respostas: a) 160g b) 295g

40) **Sejam x > 0 e y > 0, respectivamente, o número inicial de estudantes e o valor da parcela que cabe a cada um**

$\begin{cases} x \,.\, y = 3250 \\ (x + 3) \,.\, (y - 75) = 3250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3250}{x} \\ y = \dfrac{3250}{x + 3} + 75 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3250}{x} = \dfrac{3250}{x + 3} + 75 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 130 = 0 \Rightarrow x = 10$

Resposta: B

■ Módulo 3 – Função Polinomial do 1º e do 2º Grau

1) I) Observamos que a função do 1º grau é estritamente decrescente, então $a < 0$.
II) A reta intercepta o eixo y no ponto $(0; b)$, com $b > 0$.
Resposta: A

2) Dado $0 < a < b$, então $a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 + a < b^2 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow a \,.\, (a + 1) < b \,.\, (b + 1) \Rightarrow \dfrac{(a+1)}{b} < \dfrac{(b+1)}{a}$

Resposta: B

3) I) Se $x \notin \,]-1, 2]$, então:

II) Dado $x < 0$ ou $x \geqslant 3$, então:

Fazendo $I \cap II$, temos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

4) a) $2x - 10 < 4 \Leftrightarrow 2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$
b) $-3x + 5 \geqslant 2 \Leftrightarrow -3x \geqslant -3 \Leftrightarrow 3x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant 1$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$
c) $-(x - 2) \geqslant 2 - x \Leftrightarrow -x + 2 \geqslant 2 - x \Leftrightarrow 0x \geqslant 0$
$V = \mathbb{R}$
d) $x - 3 \geqslant 3 + x \Leftrightarrow 0x \geqslant 6$
$V = \varnothing$

5) $3n \geqslant \dfrac{1}{2}(n + 31) \Leftrightarrow 6n \geqslant n + 31 \Leftrightarrow 5n \geqslant 31 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{31}{5}$

O menor inteiro positivo é $n = 7$.
Resposta: C

6) $2x - 3 \leqslant 3 \Leftrightarrow 2x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant 3$
Em $\mathbb{N}$ a soluções são 0, 1, 2 e 3, cujo produto é zero.
Resposta: E

7) $\dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{2-x}{3} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{3\,.\,(2x+1) - 5(2-x)}{15} > \dfrac{15}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x + 3 - 10 + 5x > 15 \Leftrightarrow 11x > 22 \Leftrightarrow x > 2$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

8) $x - \dfrac{x-1}{2} > \dfrac{x-3}{4} - \dfrac{x-2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{12x - 6\,.\,(x-1)}{12} > \dfrac{3\,.\,(x-3) - 4\,.\,(x-2)}{12} \Leftrightarrow$

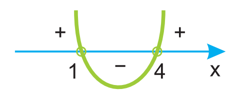
$\Leftrightarrow 12x - 6x + 6 > 3x - 9 - 4x + 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x + 6 > -x - 1 \Leftrightarrow 7x > -7 \Leftrightarrow x > -1$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

9) $\dfrac{5x-1}{4} - \dfrac{3x-13}{10} > \dfrac{5x+1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{15.(5x-1) - 6.(3x-13)}{60} > \dfrac{20.(5x+1)}{60} \Leftrightarrow$

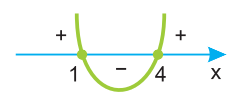
$\Leftrightarrow 75x - 15 - 18x + 78 > 100x + 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 57x + 63 > 100x + 20 \Leftrightarrow -43x > -43 \Leftrightarrow 43x < 43 \Leftrightarrow x < 1$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

10) $x^2 - 5x + 4 > 0$
As raízes são 1 e 4, logo o gráfico é do tipo



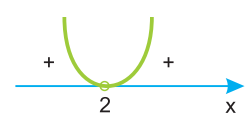
Então: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

11) $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$
As raízes são 1 e 4, logo o gráfico é do tipo



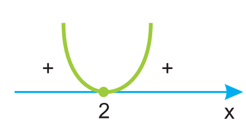
Então: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$.

12) $x^2 - 4x + 4 > 0$
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



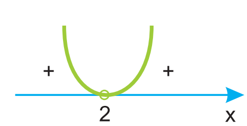
Então: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ ou $V = \mathbb{R} - \{2\}$

13) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



Então: $V = \mathbb{R}$

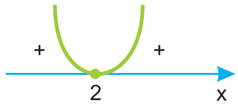
14) $x^2 - 4x + 4 < 0$
A raiz é $x = 2$, logo o gráfico é do tipo



Então: $V = \varnothing$

15) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$

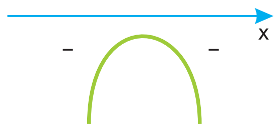
A raiz é x = 2, logo o gráfico é do tipo



Então: V = {2}

16) $-x^2 + 3x - 4 > 0$

Como $\Delta < 0$, o gráfico é do tipo



Logo: V = Ø.

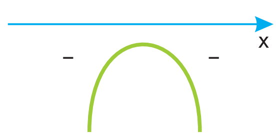
17) $-x^2 + 3x - 4 < 0$

Como $\Delta < 0$, o gráfico é do tipo

Logo: V = ℝ.

18) $-x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$

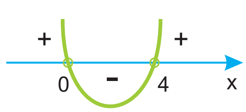
Como $\Delta < 0$, o gráfico é do tipo



Logo: V = ℝ.

19) $x^2 < 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0$

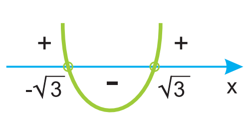
As raízes são 0 e 4, o gráfico é do tipo



Logo: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$.

20) $x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0$

As raízes são $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$, o gráfico é do tipo

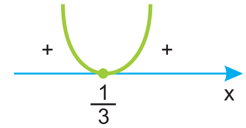


Logo: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$.

21) $9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$

I) $\Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm 0}{18} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ (raiz)

II) Gráfico

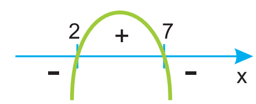


Então, $V = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

Resposta: C

22) $(x - 2) \cdot (7 - x) > 0$

As raízes são 2 e 7, o gráfico é do tipo



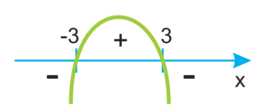
As soluções naturais são 3, 4, 5 e 6, cujo produto vale 360.

Resposta: E

23) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

A condição de existência da função é $9 - x^2 > 0$

As raízes são – 3 e 3 e o gráfico é do tipo



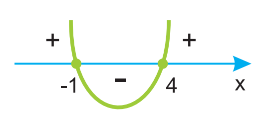
Então: $-3 < x < 3$.

$V =]-3, 3[$

Resposta: C

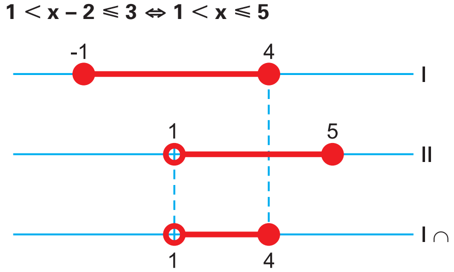
24) I) $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$

As raízes são – 1 e 4 e o gráfico é do tipo



Então, $-1 \leqslant x \leqslant 4$

II) $-1 < x - 2 \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 < x \leqslant 5$

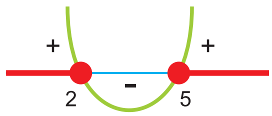


As soluções inteiras são 2, 3 e 4.

Resposta: E

25) I) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

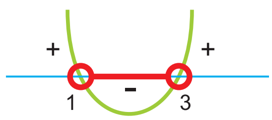
As raízes são 2 e 5 e o gráfico é do tipo



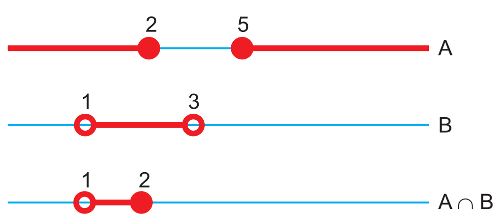
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$.

II) $x^2 - 4x + 3 < 0$

As raízes são 1 e 3 e o gráfico é do tipo



$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

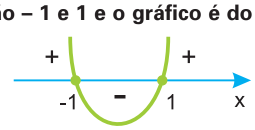


$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$

Resposta: A

26) I) $x^2 - 1 \geq 0$

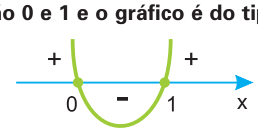
As raízes são -1 e 1 e o gráfico é do tipo



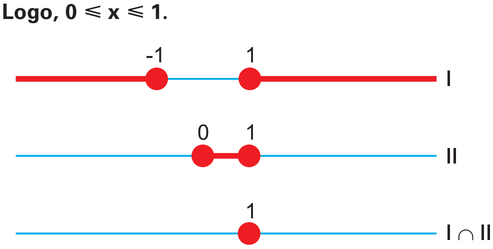
Logo, $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.

II) $x^2 - x \leq 0$

As raízes são 0 e 1 e o gráfico é do tipo



Logo, $0 \leq x \leq 1$.



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\} = \{1\}$

Resposta: A

27) I) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{5} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{5 \cdot x - 3 \cdot (x-2)}{15} < \dfrac{30}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x - 3 \cdot (x-2) < 30 \Leftrightarrow 5x - 3x + 6 < 30 \Leftrightarrow 2x < 24 \Leftrightarrow x < 12$

II) $\dfrac{3 \cdot (x-6)}{4} > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (x-6) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 18 > 0 \Leftrightarrow 3x > 18 \Leftrightarrow x > 6$

De I ∩ II: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 12\}$

28) I) $3x + 2 < 7 - 2x \Rightarrow 5x < 5 \Rightarrow x < 1$

II) $48x < 3x + 10 \Rightarrow 45x < 10 \Rightarrow x < \dfrac{10}{45} \Rightarrow x < \dfrac{2}{9}$

III) $11 - 2(x-3) > 1 - 3 \cdot (x-5) \Rightarrow 11 - 2x + 6 > 1 - 3x + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x + 17 > -3x + 16 \Rightarrow x > -1$

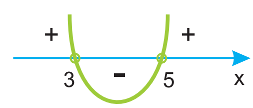
De I ∩ II ∩ III, temos: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \dfrac{2}{9}\right\}$

Resposta: C

■ Módulo 4 – Inequações – Produto e Quociente – Vértice da Parábola

1) $(x-3) \cdot (x-5) > 0$

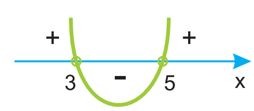
As raízes são 3 e 5 e o gráfico é do tipo



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

2) $\dfrac{x-3}{x-5} > 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (x-5) > 0$, com $x \neq 5$

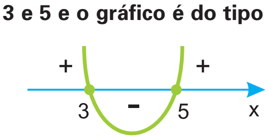
As raízes são 3 e 5 e o gráfico é do tipo



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

3) $\dfrac{x-3}{x-5} \geq 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (x-5) \geq 0$ e $x \neq 5$

As raízes são 3 e 5 e o gráfico é do tipo

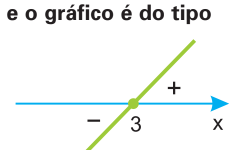


$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x > 5\}$

4) $\dfrac{x-3}{3x - x^2} < 0$

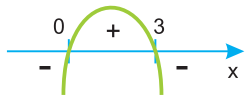
I) $f(x) = x - 3$

$x = 3$ é a raiz e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = 3x - x^2$

As raízes são 0 e 3 e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

		0		3		
	-		-		+	f(x)
	-		+		-	g(x)
	+		-		-	f(x) ÷ g(x)
		0		3		

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ \text{ e } \ x \neq 3\}$

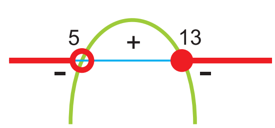
Resposta: E

5) $\dfrac{3}{x-5} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x-5} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3 - 2 \cdot (x-5)}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 - 2x + 10}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x + 13}{x-5} \leq 0 \Leftrightarrow (-2x+13) \cdot (x-5) \leq 0 \ \text{ e } \ x \neq 5$

As raízes são $\dfrac{13}{2}$ e 5 e o gráfico é do tipo



$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ ou } x \geq \dfrac{13}{2}\right\}$

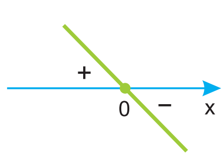
Resposta: E

6) $\dfrac{x}{x+3} - \dfrac{1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow$

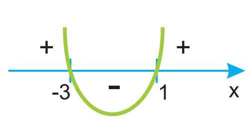
$\Leftrightarrow \dfrac{x \cdot (x-1) - (x+3) - (x+3) \cdot (x-1)}{(x+3) \cdot (x-1)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - x - 3 - (x^2 + 2x - 3)}{(x+3) \cdot (x-1)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x}{(x+3) \cdot (x-1)} > 0$

I) $f(x) = -4x$, a raiz é $x = 0$ e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = (x+3) \cdot (x-1)$, as raízes são -3 e 1 e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

		-3		0		1		
	+		+		-		-	f(x)
	+		-		-		+	g(x)
	+		-		+		-	f(x) ÷ g(x)
		-3		0		1		

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \ \text{ ou } \ 0 < x < 1\}$

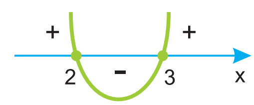
Resposta: B

7) $\dfrac{x^2 - 3x + 8}{x+1} < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 8 - 2(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x+1} < 0$

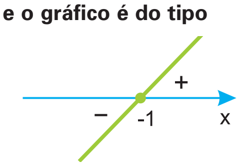
I) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

As raízes são 2 e 3 e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = x + 1$

A raiz é $x = -1$ e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

		-1		2		3		
	+		+		-		+	f(x)
	-		+		+		+	g(x)
	-		+		-		+	f(x) . g(x)
		-1		2		3		

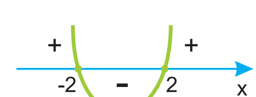
$V =]-\infty, -1[\ \cup \ ]2, 3[$

Resposta: A

8) $(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 4x) \geq 0$

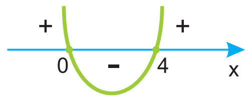
I) $f(x) = x^2 - 4$

As raízes são -2 e 2 e o gráfico é do tipo



II) $g(x) = x^2 - 4x$

As raízes são 0 e 4 e o gráfico é do tipo



III) Quadro de sinais

	-2		0		2		4		
+		-		-		+		+	f(x)
+		+		-		-		+	g(x)
+		-		+		-		+	f(x) . g(x)

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

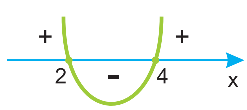
Resposta: D

9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}}$

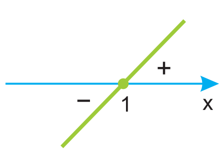
I) O domínio é a condição de existência da função.

II) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} \geq 0$ com $x \neq 1$.

III) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, as raízes são 2 e 4 e o gráfico é do tipo



IV) $g(x) = x - 1$, a raiz é $x = 1$ e o gráfico é do tipo



V) Quadro de sinais

	1		2		4		
+		+		-		+	f(x)
-		+		+		+	g(x)
-		+		-		+	f(x) ÷ g(x)
	1		2		4		

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

Resposta: C

10) $f(x) = -x^2 + 12x + 20$

$x_v = \dfrac{-b}{4a} = \dfrac{-12}{2 \,.\, (-1)} = 6$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ ou $y_v = -6^2 + 12 \,.\, 6 + 20 = 56$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, para $x_v = 6$ o máximo é $y_v = 56$.

Resposta: C

11) $L(x) = 100 \,.\, (10 - x) \,.\, (x - 4)$

As raízes são 4 e 10 e, portanto, $x_v = \dfrac{4 + 10}{2} = 7$.

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, o lucro é máximo quando $x_v = 7$.

Resposta: A

12) $f(x) = -2x^2 + 4x + 12$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e, portanto, o valor máximo é

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(4^2 - 4 \,.\, (-2) \,.\, 12)}{4 \,.\, (-2)} = 14.$

Resposta: E

13) $y = x - 0{,}05 \,.\, x^2$

Como $a < 0$, a parábola tem a concavidade para baixo e, portanto, a altura máxima atingida pelo golfinho é

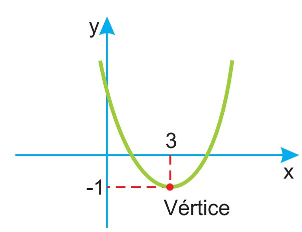
$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(1 - 4 \,.\, (-0{,}05) \,.\, 0)}{4 \,.\, (-0{,}05)} = \dfrac{-1}{-0{,}20} = 5$

Resposta: A

14) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

I) $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 3$ e $y_v = 3^2 - 6 \,.\, 3 + 8 = -1$

II) O gráfico é do tipo



O conjunto imagem é $Im = [-1, +\infty[$

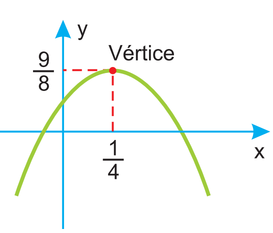
Resposta: E

15) $y = -2x^2 + x + 1$

I) $x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{4}$ e

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(1^2 - 4 \,.\, (-2) \,.\, 1)}{4 \,.\, (-2)} = \dfrac{9}{8}$

II) O gráfico é do tipo



O conjunto imagem é $Im = \left]-\infty, \dfrac{9}{8}\right]$

Resposta: A

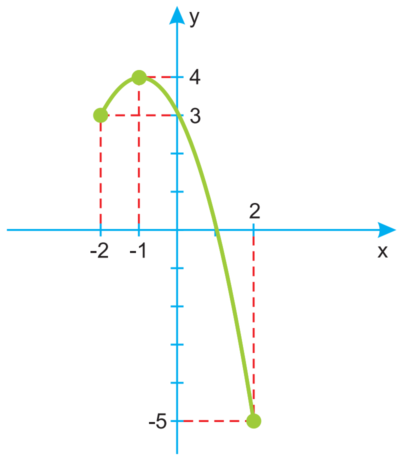
16) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

I) Como o domínio é $[-2, 2]$, temos:

$$\begin{cases} f(-2) = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 3 \\ f(2) = -2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = -5 \end{cases}$$

II) $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -1$ e $y_v = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$

III) O gráfico é do tipo



O conjunto imagem é $Im = [-5, 4]$

Resposta: B

17) lucro = receita – custo ⇒

⇒ lucro $= (-x^2 + 10{,}5x) - (x^2 + 0{,}5x + 1)$ ⇒

⇒ lucro $= -2x^2 + 10x - 1$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e o lucro máximo é $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1))}{4 \cdot (-2)} = 11{,}5$

Resposta: B

18) I) De acordo com o gráfico, temos que -1 e 3 são as raízes reais da função quadrática.

II) Forma fatorada: $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$ ⇒

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$$

III) No gráfico, temos $f(1) = -2$ e, portanto,

$f(1) = a \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 3) \Rightarrow -4a = -2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

De II e III, temos: $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x - 3) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{3}{2}$

Resposta: B

19) $f(x) = (m - 1)x^2 + 2mx + 3m$

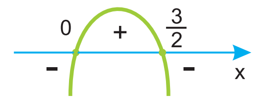
I) Uma função do 2º grau é estritamente positiva quando $a > 0$ e $\Delta < 0$.

II) $a > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

III) $\Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot (3m) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m^2 + 12m < 0 \Leftrightarrow -8m^2 + 12m < 0$

As raízes são 0 e $\dfrac{3}{2}$ e o gráfico é do tipo



então, $m < 0$ ou $m > \dfrac{3}{2}$.

De II e III, temos $m > \dfrac{3}{2}$.

Resposta: C

20) $f(x)$ é uma função do tipo $f(x) = ax + b$ e $g(x) = (\sqrt{2}\,)^x$.

I) para $x = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow a \cdot 0 + b = (\sqrt{2}\,)^0 \Leftrightarrow b = 1$

II) para $x = 2 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow a \cdot 2 + 1 = (\sqrt{2}\,)^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

De I e II: $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$, logo $f(10) = \dfrac{1}{2} \cdot 10 + 1 = 6$.

Resposta: C

21) $2^{x^2} \cdot 4^{x-2} = \dfrac{1}{2^{ax-1}} \Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot (2^2)^{x-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{ax-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{2x-4} = (2^{-1})^{ax-1} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x-4} = 2^{-ax+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = -ax + 1 \Leftrightarrow x^2 + (2 + a)x - 5 = 0$.

Como a soma e o produto são iguais:

$-\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow -(2 + a) = -5 \Leftrightarrow 2 + a = 5 \Leftrightarrow a = 3$

Resposta: E

22) $(4^{3-x})^{2-x} = 1 \Leftrightarrow (4^{3-x})^{2-x} = 4^0 \Leftrightarrow 4^{(3-x).(2-x)} = 4^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3 - x).(2 - x) = 0$, as raízes são 2 e 3 e, portanto, o produto é igual a 6.

Resposta: E

23) $f(x) = g(x) \Rightarrow 2^{x^2-4} = 4^{x^2-2x} \Leftrightarrow 2^{x^2-4} = (2^2)^{x^2-2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-4} = 2^{2x^2-4x} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$, a raiz é $x = 2$.

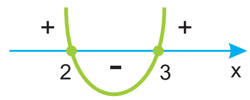
Logo, $2^x = 2^2 = 4$.

Resposta: D

24) $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 5 \\ 3^{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{2x+3y} = 5^1 \\ 3^{x+y} = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow V = \{(-1; 1)\}$

25) a) $3^{x^2 - 5x + 7} < 3^1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$, as raízes são 2 e 3 e o gráfico é do tipo



Logo, $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} =]2, 3[$

b) $\nexists\, x \in \mathbb{Z}$, logo $V = \emptyset$

26) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{(2x-3)} \leqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1} \Leftrightarrow 2x - 3 \geqslant 1 \Leftrightarrow 2x \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant 2$

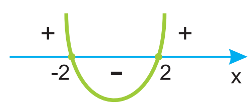
Resposta: C

27) I) O domínio é a condição de existência da função.

II) $(1{,}4)^{x^2-5} - \dfrac{5}{7} \geqslant 0 \Leftrightarrow (1{,}4)^{x^2-5} \geqslant \dfrac{5}{7} \Leftrightarrow \left(\dfrac{14}{10}\right)^{x^2-5} \geqslant \dfrac{5}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{7}{5}\right)^{x^2-5} \geqslant \left(\dfrac{7}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 5 \geqslant -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$, as raízes são -2 e 2 e o gráfico é do tipo



Logo, o domínio da função é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

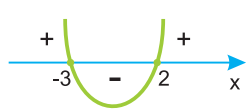
Resposta: A

28) $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geqslant \left(\dfrac{3}{9}\right)^{x-3} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}.(x-1)} \geqslant (3^{-1})^{x-3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}.(x-1) \geqslant -x + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x \geqslant -2x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \geqslant 0$

As raízes são -3 e 2 e o gráfico é do tipo



Logo, $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Resposta: A

29) $y = A \,.\, k^x$

I) Para $x = 0$, temos $y = 5\,000$, então: $A \,.\, k^0 = 5\,000 \Leftrightarrow A = 5\,000$

II) Para $x = 2$, temos $y = 2\,500$, então: $5\,000 \,.\, k^2 = 2\,500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 = \dfrac{1}{2}$

III) Para $x = 6$, temos $y = 5\,000 \,.\, k^6 = 5\,000 \,.\, (k^2)^3 =$

$= 5\,000 \,.\, \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 5\,000 \,.\, \left(\dfrac{1}{8}\right) = 625$

Resposta: A

FRENTE 2 – ÁLGEBRA

■ Módulo 1 – Definição e Operações com Conjuntos

1) O conjunto $A = \{1; 2; \{2\}; \{3\}; \emptyset\}$ tem 5 elementos. A relação de pertinência desses elementos é:

$1 \in A$

$2 \in A$

$\{2\} \in A$

$\{3\} \in A$

$\emptyset \in A$

Assim, temos:

a)	$1 \in A$ e $2 \in A$	(V)
b)	$\{3\} \in A$	(V)
c)	$3 \notin A$	(V)
d)	$\{1\} \subset A$	(V)
e)	$\{2\} \subset A$	(V)
f)	$\{\{2\}, \{3\}\} \subset A$	(V)
g)	$\{1; 3\} \not\subset A$	(V)
h)	$\emptyset \in A$	(V)
i)	$\{\emptyset\} \subset A$	(V)
j)	$\emptyset \notin A$	(F), pois $\emptyset \in A$
k)	$\{2\} \in A$	(V)
l)	$\{1\} \in A$	(F), pois $\{1\} \notin A$
m)	$5 \notin A$	(V)
n)	$\{1; 2\} \subset A$	(V)
o)	$\{\{2\}\} \not\subset A$	(V)
p)	$\{1; 2; 4\} \not\subset A$	(V)
q)	$\{3\} \not\subset A$	(V)
r)	$\emptyset \subset A$	(V)
s)	$A \subset A$	(V)
t)	$\{4; \emptyset\} \not\subset A$	(V)

2) Sendo $A = \{3; \{3\}\}$, tem-se:

1) $3 \in A$ é verdadeira.

2) $\{3\} \subset A$ é verdadeira.

3) $\{3\} \in A$ é verdadeira

Resposta: D

3) I) $\{1; 2\} \subset X \Rightarrow 1 \in X$ e $2 \in X$

II) $X \subset \{1; 2; 3; 4\}$

De (I) e (II), podemos ter:

$X = \{1; 2\}$ ou $X = \{1; 2; 3\}$ ou $X = \{1; 2; 4\}$ ou $X = \{1; 2; 3; 4\}$

Resposta: B

4) O conjunto $\{a; b; c; d; e; f; g\}$ tem 7 elementos, então, o total de subconjuntos é $2^7 = 128$

Resposta: B

5) O conjunto $A = \{1; 3; 5\}$ tem 3 elementos, então, o total de subconjuntos é $2^3 = 8$, incluindo o conjunto vazio. Logo, o número de subconjuntos não vazios é $8 - 1 = 7$.

Resposta: A

6) O conjunto formado pelos múltiplos estritamente positivos de 5, menores que 40, é $\{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35\}$ que possui

7 elementos e um total de $2^7 = 128$ subconjuntos, incluindo o conjunto vazio. Logo, o número de subconjuntos não vazios é $n = 128 - 1 = 127$.
Resposta: A

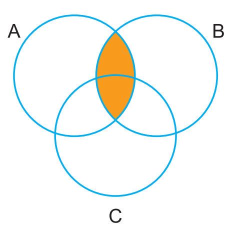
7) Para $S = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, $A = \{1; 3; 5\}$ e $B = \{3; 5; 7; 9\}$, tem-se:
I) $A \cup B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
II) $A \cap B = \{3; 5\}$
III) $A - B = \{1; 3; 5\} - \{3; 5; 7; 9\} = \{1\}$
IV) $B - A = \{3; 5; 7; 9\} - \{1; 3; 5\} = \{7; 9\}$
V) $\overline{B} = \complement_S^B = S - B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} - \{3; 5; 7; 9\} = \{1; 11\}$
Resposta: E

8) $\begin{cases} A = \{3; 7; x; 5; 9\} \\ B = \{1; 5; x; 8; y; 4\} \\ A \cap B = \{5; 6; 9\} \end{cases} \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \{3; 7; 6; 5; 9\}$ e $B = \{1; 5; 6; 8; 9; 4\}$
01) É falsa, pois $A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
02) É verdadeira, pois $A - B = \{3; 7\}$
04) É falsa, pois $A \not\subset B$
08) É verdadeira, pois $8 \notin A$
16) É verdadeira, pois $x + y = 6 + 9 = 15$
Resposta: São verdadeiras 02, 08 e 16

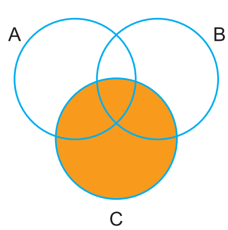
9) Se $M \cup N = \{1; 2; 3; 5\}$ e $M \cup P = \{1; 3; 4\}$, então:
$M \cup N \cup P = \{1; 2; 3; 5\} \cup \{1; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Resposta: E

10) Se existe $x \in A$ e $x \in B$, então existe $x \in A \cap B$, isto é, $A \cap B \neq \varnothing$
Resposta: D

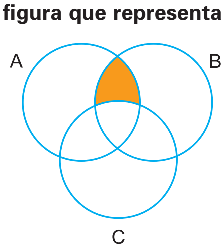
11) I) Sombreando a região correspondente a $A \cap B$, tem-se:



II) Sombreando a região correspondente ao conjunto C, tem-se:



III) A figura que representa $(A \cap B) - C$ é:

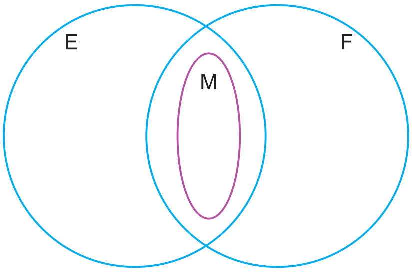


Resposta: A

12) I) Todo jovem que gosta de matemática adora esportes $\Rightarrow$ $\Rightarrow M \subset E$

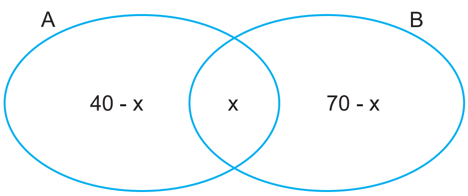
II) Todo jovem que gosta de matemática adora festas $\Rightarrow$ $\Rightarrow M \subset F$

III) $\begin{cases} M \subset E \\ M \subset F \end{cases} \Rightarrow M \subset (E \cap F)$, que pode ser representado por:



Resposta: C

13) I) Representando num diagrama, tem-se:

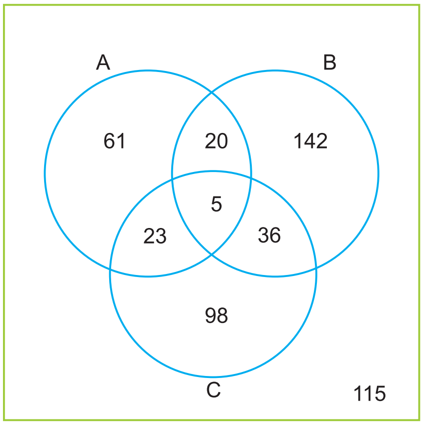


II) $40 - x + x + 70 - x = 100 \Leftrightarrow x = 10$

III) O percentual de leitores que leem os jornaius A e B é $\dfrac{10}{100} = 10\%$

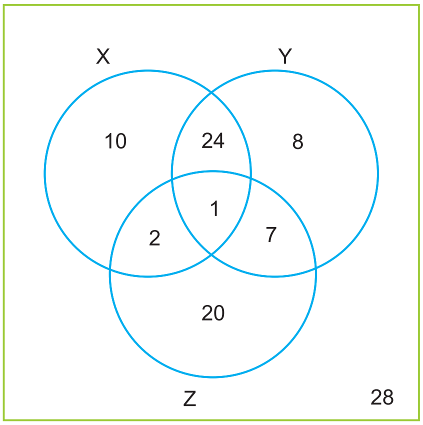
Resposta: A

14) I) Representando num diagrama, tem-se:



II) O número de pessoas que consomem ao menos duas marcas é $20 + 23 + 36 + 5 = 84$
Resposta: D

15) I) Representando num diagrama, em porcentagens, tem-se:



II) A porcentagem de entrevistados que não preferem nem X nem Y é (20 + 28)% = 48%

Resposta: D

■ Módulo 2 – Produto Cartesiano, Relações Binárias e Funções – Definição, Domínio, Contradomínio e Imagem

1) (0) V, (1) F, (2) F, (3) F, (4) V, (5) F

2) Se A = {1; 2}, B = {3; 4} e C = {4; 5}, tem-se:

I) B ∩ C = {3; 4} ∩ {4; 5} = {4}

II) A×(B ∩ C) = {1; 2} × {4} = {(1; 4); (2; 4)}

Resposta: A

3) I) {(0; 2), (0; 3), (1; 2), (2; 3)} ⊂ A×B ⇒ {0; 1; 2} ⊂ A e {2; 3} ⊂ B, sendo que A e B podem ter outros elementos.

II) A×B tem, no mínimo, 3.2 = 6 pares ordenados, entre eles estão necessariamente (1; 3) e (2; 2), portanto, pode-se afirmar que {(1; 3), (2; 2)} ⊂ A×B

Resposta: D

4) I) Se A = {5} e B = {3; 7}, então, A×B = {(5; 3); (5; 7)}

II) As relações binárias de A em B são os subconjuntos de A×B, isto é: Ø, {(5; 3)}, {(5; 7)} e A×B

Resposta: D

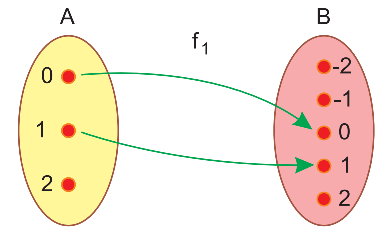
5) I) Se n(A) = m e n(B) = p, então, n(A×B) = n(A) . n(B) = m . p

II) O número de relações binárias de A em B é o número de subconjuntos de A×B, isto é, $2^{m \cdot p}$, incluindo o conjunto vazio.

Assim, o número de relações não vazias é $2^{m \cdot p} - 1$

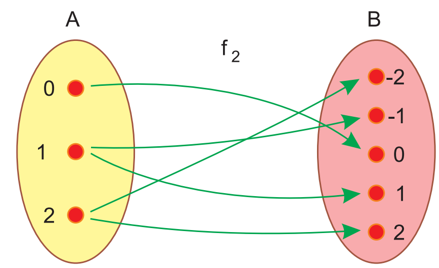
Resposta: D

6) a) f_1 = {(0; 0); (1; 1)}



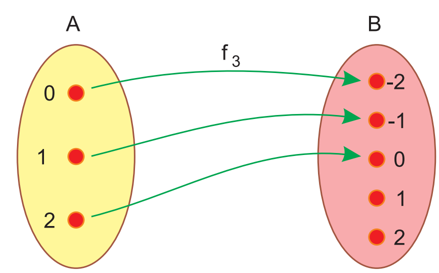
f_1 não é função, pois do elemento 2 não parte nenhuma flecha.

b) f_2 = {(0, 0), (1, –1), (1, 1), (2, –2), (2, 2)}



f_2 não é função, pois dos elementos 1 e 2 partem mais de uma flecha.

c) f_3 = {(0, – 2), (1, – 1), (2, 0)}



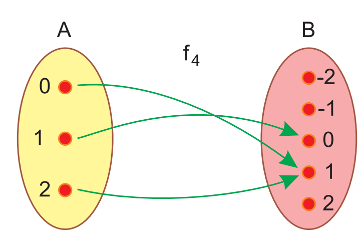
f_3 é uma função com:

$D(f_3)$ = {0; 1; 2} = A

$CD(f_3)$ = {– 2; – 1; 0; 1; 2} = B

$Im(f_3)$ = {– 2; – 1; 0} ⊂ B.

d) f_4 = {(0, 1), (1, 0), (2, 1)}



f_4 é uma função com:

D (f_4) = {0; 1; 2} = A

CD (f_4) = {– 2; – 1; 0; 1; 2} = B

$Im(f_4)$ = {0; 1} ⊂ B

7) a) f não é função, pois a reta vertical de abscissa 4 intercepta o gráfico em dois pontos.

b) g não é função, pois a reta vertical da abscissa 4 não intercepta o gráfico.

c) h é uma função com:

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 6\} = A$

$CD(h) = \mathbb{R}$

$Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y < 5\}$

8) Se $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}, \text{ se x é racional} \\ \frac{3}{4}, \text{ se x é irracional} \end{cases}$ e observando que

$\sqrt{2}$ é irracional, $\frac{3}{5}$ é racional e π é irracional, tem-se:

$$\frac{f(\sqrt{2}) + f\left(\frac{3}{5}\right)}{f(\pi)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+8}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{23}{20} \cdot \frac{4}{3} = \frac{23}{15}$$

Resposta: E

9) I) $f(x) = 3x + 5 \Rightarrow f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8$

II) $g(x) = \frac{f(x) + 8}{f(x) - 4} \Rightarrow g(1) = \frac{f(1) + 8}{f(1) - 4} = \frac{8 + 8}{8 - 4} = \frac{16}{4} = 4$

Resposta: C

10) Para $f(x) = \frac{3}{5} \cdot x - 1$ e $g(x) = \frac{4}{3} \cdot x + a$, tem-se:

I) $f(0) - g(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow -1 - a = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$

II) $f(3) - 3 \cdot g\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} \cdot 3 - 1 - 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) =$

$= \frac{9}{5} - 1 - 3 \cdot \left(\frac{4}{15} - \frac{4}{3}\right) = \frac{9}{5} - 1 - 3 \cdot \left(\frac{4 - 20}{15}\right) =$

$= \frac{9}{5} - 1 - 3 \cdot \left(\frac{-16}{15}\right) = \frac{9}{5} - 1 + \frac{16}{5} =$

$= \frac{25}{5} - 1 = 5 - 1 = 4$

Resposta: E

11) Para $h(t) = 1{,}5t - 9{,}4$ e $p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246$, tem-se:

I) $h(t) = 35{,}6 \Rightarrow 1{,}5t - 9{,}4 = 35{,}6 \Leftrightarrow 1{,}5t = 45 \Leftrightarrow t = 30$

II) $p(30) = 3{,}8 \cdot 30^2 - 72 \cdot 30 + 246 = 3420 - 2160 + 246 = 1506$

Resposta: 1506 g

12) Sendo $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, tem-se:

a) Para $C = 35 \Rightarrow 35 = \frac{5}{9} \cdot (F - 32) \Leftrightarrow 63 = F - 32 \Leftrightarrow F = 95$

b) Para $F = 2C \Rightarrow C = \frac{5}{9} \cdot (2C - 32) \Leftrightarrow 9C = 10C - 160 \Leftrightarrow C = 160$

Respostas: a) F = 95 b) C = 160

13) Para t = 16 e $d = 7{,}0 \cdot \sqrt{t - 12}$, temos:

$d = 7{,}0 \cdot \sqrt{16 - 12} = 7{,}0 \cdot \sqrt{4} = 7{,}0 \cdot 2 = 14{,}0$

Resposta: D

14) Considerando que domínio de uma função real é o conjunto dos valores reais para os quais a função existe, temos:

a) $f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 8}$ existe para $2x - 8 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 4$

Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ existe para $2 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\}$

c) $f(x) = 2x + 5$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$

Assim, $D(f) = \mathbb{R}$

Respostas: a) $\mathbb{R} - \{4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\}$ c) $\mathbb{R}$

15) A função $y = \frac{1}{\sqrt{3x - 2}}$ existe para $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

Assim $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

Resposta: D

16) Para que a função $y = f(x) = \sqrt{x + 7} + \sqrt{1 - x}$ exista, devemos ter:

$\begin{cases} x + 7 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -7 \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \le x \le 1$

Resposta: B

17) $f(x + 1) = \frac{3x + 5}{2x + 1}$ não existe para $x = -\frac{1}{2}$, isto é, não existe $f\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Assim, se não existe $f\left(\frac{1}{2}\right)$, o domínio da função f é $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

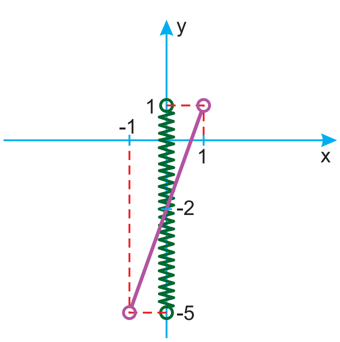
Resposta: A

18) Na função y = 3x – 2, tem-se:

I) Para $x = -1 \Rightarrow y = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$

II) Para $x = 1 \Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

Assim, o gráfico da função y = 3x – 2 para $x \in]-1; 1[$ é:

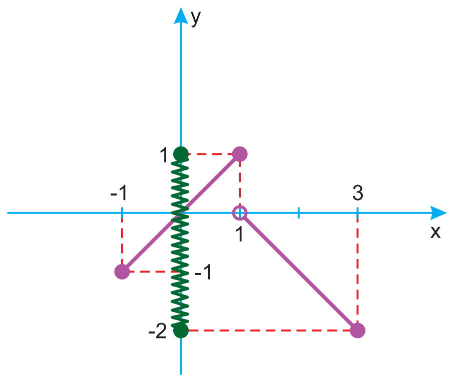


Portanto, o conjunto imagem é]– 5; 1[

Resposta: E

19) Representando graficamente a função

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } -1 \le x \le 1 \\ -x+1, \text{ para } 1 < x \le 3 \end{cases} \text{, tem-se:}$$



Portanto, o conjunto imagem é $[-2; 1]$

Resposta: A

20) Para x em anos e f(x) em porcentagem da área da floresta a cada ano, temos de acordo com o gráfico:

$$\begin{cases} f(0) = 20 \\ f(6) = 50 \\ f(10) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{200}{c} = 20 \Leftrightarrow c = 10 \\ \dfrac{6a + 200}{6b + 10} = 50 \\ \dfrac{10a + 200}{10b + 10} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 200 = 300b + 500 \\ 10a + 200 = 600b + 600 \\ c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 50b = 50 \\ a - 60b = 40 \\ c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 1 \\ c = 10 \end{cases}$$

Portanto, $f(x) = \dfrac{100x + 200}{x + 10}$

Resposta: a = 100, b = 1 e c = 10

$$f(x) = \frac{100x + 200}{x + 10}$$

■ Módulo 3 – Características e Propriedades da Função, Função Composta e Função Inversa

1) I) Graficamente, uma função é injetora quando nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico mais de uma vez. Assim, não é injetora a função da alternativa "a".

II) O gráfico da alternativa "c" não é função, pois existe reta vertical que intercepta o gráfico mais de uma vez.

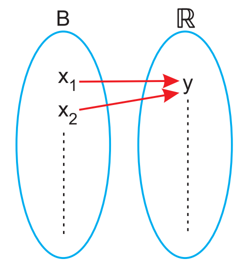
III) O gráfico da alternativa "e" não é função, pois existe reta vertical que não intercepta o gráfico com $x \in \mathbb{R}$.

IV) Uma função é sobrejetora quando Im = CD. Assim, não é sobrejetora a função da alternativa "b", pois $CD = \mathbb{R} \neq Im = \mathbb{R}_+^*$.

V) Portanto, é bijetora (injetora e sobrejetora) a função da alternativa "d".

Resposta: D

2) Se B é o conjunto formado por todos os brasileiros, a função $f: B \to \mathbb{R}$ que associa a cada brasileiro sua altura em centímetros, representada num diagrama de flechas, é:

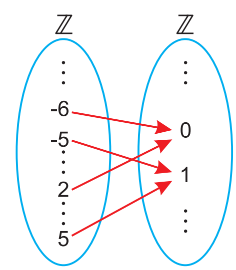


I) A função não é injetiva (injetora) pois existem elementos diferentes em B associados ao mesmo elemento em $\mathbb{R}$, observando que existe mais de uma pessoa com a mesma altura.

II) A função não é sobrejetiva (sobrejetora) pois $Im(f) \neq CD(f)$, observando que, por exemplo, não existem pessoas com altura negativa.

Resposta: D

3) Representando a função f num diagrama de flechas, tem-se:



I) A função não é sobrejetora, pois $Im(f) = \{0; 1\} \neq CD(f) = \mathbb{Z}$

II) A função não é injetora, pois $f(-5) = f(5) = 1$

III) $f(-5) \cdot f(2) = 1 \cdot 0 = 0$

IV) $f(-5) + f(5) = 1 + 1 = 2$

Resposta: E

4) Se $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x^2 - 2x) = f(4 + x)$ é injetora, então:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 4 + x \\ (x^2 - 2x) \in \mathbb{R}_+^* \\ (4 + x) \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x^2 - 2x > 0 \\ 4 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 4 \\ x^2 - 2x > 0 \\ 4 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$

Resposta: $x = -1$ ou $x = 4$

5) a) A função f é definida por $f(x) = \begin{cases} 11, \text{ se } x = 0 \\ x + 3, \text{ se } x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ x + 2, \text{ se } x \in \{6, 7, 8, 9\} \end{cases}$

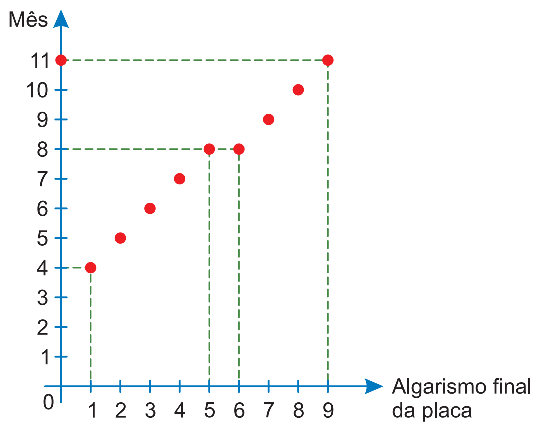
b) f não é injetora pois $f(5) = f(6) = 8$

c) Para os meses de agosto e novembro não se pode afirmar o final da placa, justamente por não ser injetora.

d) $f(x + 1) - f(x) = [x + 1 + 3] - [x + 3] = 1$, para x = 1, 2, 3, 4 e

$f(x + 1) - f(x) = [x + 1 + 2] - [x + 2] = 1$, para x = 6, 7, 8

e) O gráfico de f é



Resposta: A

6) Analisando o gráfico podemos concluir que

a) falsa
de janeiro a setembro de 2007 a arrecadação da Receita Federal ora aumentou ora diminuiu;

b) falsa
admitindo que a arrecadação da Receita Federal em setembro de 2007 tenha sido de R$ 46,2 bilhões, temos $46{,}2 \cdot 1{,}1 = 50{,}82 > 48{,}48$

c) falsa
admitindo que em janeiro de 2007a arrecadação da Receita Federal tenha sido de R$ 55 bilhões, temos:
$55 \cdot 1{,}1114 = 61{,}127 > 48{,}8$

d) falsa
embora a arrecadação da Receita Federal tenha sido crescente de fevereiro a abril de 2007, e de maio a julho, ela foi decrescente de julho a agosto.

e) verdadeira
de fato, de julho a setembro de 2007 a arrecadação da Receita Federal foi decrescente.

Resposta: E

7) a) Falsa, pois $f(1) = 0$

b) Falsa, pois $D(f) = \mathbb{R}$

c) Falsa, pois $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

d) Verdadeira

e) Falsa, pois para $0 < x < 1$ f é decresccente

Resposta: D

8) Se f é uma função estritamente crescente e $f(2x - 7) < f(x - 1)$, então $2x - 7 < x - 1 \Leftrightarrow x < 6$

Resposta: A

9) Resposta: D

10) Se $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 3$, então:

a) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(4) = 4 + 3 = 7$

b) $(gof)(3) = g(f(3)) = g(6) = 6 + 3 = 9$

c) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3$

Respostas: a) 7 b) 9 c) $2x + 3$

11) Se $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x - 2$, então:

a) $(fog)(0) = f(g(0)) = f(-2) = -8 + 1 = -7$

b) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(1) = 1 - 2 = -1$

c) $(fof)(1) = f(f(1)) = f(2) = 8 + 1 = 9$

d) $(gof)(1) = g(g(1)) = g(-1) = -1 - 2 = -3$

Respostas: a) – 7 b) – 1 c) 9 d) – 3

12) Se $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2$, então:

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

Resposta: A

13) Se $x \in \mathbb{N}$, o resto da divisão de x por 4 pertence ao conjunto $\{0; 1; 2; 3\}$, então, $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$ ou $f(x) = 3$.

Assim, para $g(x) = x^2 - 2x + 1$, tem-se:

I) Se $f(x) = 0 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$

II) Se $f(x) = 1 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$

III) Se $f(x) = 2 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$

IV) Se $f(x) = 3 \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4$

Portanto, o conjunto imagem de gof é $\{0; 1; 4\}$, que é formado por três números quadrados perfeitos.

Resposta: C

14) Observando os gráficos das funções f e g, temos:

I) $f(4) = 0$

II) $(gof)(4) = g(f(4)) = g(0) = -4$

III) $g(1) = a$, com $a < 0$

IV) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(a) = 2$, pois $a < 0$ e a função f é constante e igual a 2 para todo valor negativo.

Assim, $(gof)(4) + (fog)(1) = -4 + 2 = -2$

Resposta: D

15) Se $g(x) = 1 - x$ e $(fog)(x) = \dfrac{1 - x}{x}$, então:

I) $f(g(x)) = \dfrac{1 - x}{x}$

II) $g(x) = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 1 - x = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

Assim, para $x = -\dfrac{1}{3}$, tem-se:

$$f(g(x)) = \frac{1 - x}{x} \Rightarrow f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1 + \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}} = -4$$

Resposta: E

16) Se $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, então:

I) $f(g(x)) = f(ax + b) = 2(ax + b) + 3 = 2ax + 2b + 3$

II) $f(g(x)) = 8x + 7 \Rightarrow 2ax + 2b + 3 = 8x + 7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2b + 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4 + 2 = 6$$

Resposta: D

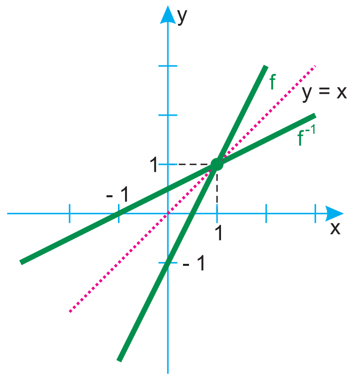
17) I) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1 \Rightarrow y = 2x - 1$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

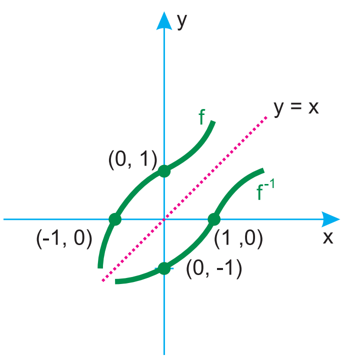
$$x = 2y - 1 \Leftrightarrow 2y = x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}, \text{ com } f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

III) Representando graficamente f e f^{-1}, temos:



18)



19) I) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{4x - 1}{3}$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{4y - 1}{3} \Leftrightarrow 4y - 1 = 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y = 3x + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3x + 1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4}$$

Resposta: C

20) I) Sendo x o número pensado, o resultado obtido com a sequência de operações é $y = \dfrac{x^2 + 5}{2}$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{y^2 + 5}{2} \Leftrightarrow y^2 + 5 = 2x \Leftrightarrow y^2 = 2x - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2x - 5}, \text{ pois } y \in \mathbb{N}$$

Resposta: D

21) I) A função que fornece o salário y a partir do número de horas trabalhadas h, é:

$$y(h) = \begin{cases} 20h - 90, \text{ para } 0 \le h \le 160 \\ 20 \,.\, 160 + 24(h - 160) - 90, \text{ para } h > 160 \end{cases}$$

$$y(h) = \begin{cases} 20h - 90, \text{ para } 0 \le h \le 160 \\ 24h - 730, \text{ para } h > 160 \end{cases}$$

II) $y(160) = 20 \,.\, 160 - 90 = 3110$

III) Para $y \le 3110$, temos:

$$y(h) = 20h - 90 \Rightarrow y = 20 \,.\, h(y) - 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 \,.\, h(y) = y + 90 \Leftrightarrow h(y) = \frac{y + 90}{20}$$

IV) Para $y > 3110$, temos:

$$y(h) = 24h - 730 \Rightarrow y = 24 \,.\, h(y) - 730 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \,.\, h(y) = y + 730 \Leftrightarrow h(y) = \frac{y + 730}{24}$$

V) A função que fornece o número de horas trabalhadas h a partir do salário y, é:

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{y + 90}{20}, \text{ para } y \le 3110 \\ \dfrac{y + 730}{24}, \text{ para } y > 3110 \end{cases}$$

Resposta: B

22) I) $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x} \Rightarrow y = \dfrac{2 + x}{2 - x}$

II) Trocando x por y e y por x, temos:

$$x = \frac{2 + y}{2 - y} \Leftrightarrow 2 + y = 2x - xy \Leftrightarrow xy + y = 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \,.\, (x + 1) = 2x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 2}{x + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

III) $D(f^{-1}) = CD(f) = \mathbb{R} - \{a\} = \mathbb{R} - \{-1\}$, portanto, $a = -1$.

Resposta: D

■ Módulo 4 – Sequências e Progressão Aritmética

1) Se $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, então:

I) $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4$

II) $a_4 = a_2 + a_3 = 3 + 4 = 7$

III) $a_5 = a_3 + a_4 = 4 + 7 = 11$

IV) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 3 + 4 + 7 + 11 = 26$

Resposta: D

2) I) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n + 1 - 1}{n + 1} = \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

II) $a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \dots \,.\, a_{98} \,.\, a_{99} =$

$$= \frac{1}{2} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{3}{4} \,.\, \dots \,.\, \frac{98}{99} \,.\, \frac{99}{100} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Resposta: C

3) Na P.A., tem-se $a_7 = 12$ e $r = 5$, então:
$a_7 = a_1 + 6 . r \Rightarrow 12 = a_1 + 6 . 5 \Leftrightarrow 12 = a_1 + 30 \Leftrightarrow a_1 = -18$
Resposta: A

4) O décimo quinto termo da progressão aritmética (5; 7; 9; …) é $a_{15} = 5 + 14 . 2 = 33$.
Resposta: C

5) A população mundial atual é de 4 × 1,5 bilhão de pessoas, ou seja, 6,0 bilhões de habitantes.
Assim, na progressão aritmética $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ que determina o número de habitantes da Terra em (2007, 2008, 2009, …), respectivamente, temos:
I) $p_1 = 6{,}0$ bilhões e $p_2 = 6{,}095$ bilhões, portanto, a razão (r) da progressão é, em número de habitantes, r = (6,095 – 6,0) bilhão = 0,095 bilhão.
II) $p_{19} = p_1 + (19 - 1) . r = (6{,}0 + 18 . 0{,}095)$ bilhões = = 7,71 bilhões.
O número de habitantes da Terra que, em 2025, não terá água potável será de $\frac{2}{3}$. 7,71 bilhões = 5,14 bilhões.
Resposta: A

6) I) (20; 23; 26; …; 152) é uma P.A. de razão 3, então:
$a_n = a_1 + (n - 1) . r \Rightarrow 152 = 20 + (n - 1) . 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 132 = (n - 1) . 3 \Leftrightarrow 44 = n - 1 \Leftrightarrow n = 45$, assim, o restaurante serviu 152 refeições após 45 dias de funcionamento.
II) Não abrindo aos domingos, cada semana tem 6 dias de funcionamento do restaurante, assim:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 6 \\ \hline 3 & 7 \end{array} \Rightarrow 45 = 6 . 7 + 3$$

III) Se o primeiro dia de funcionamento foi uma segunda-feira, 45 dias depois equivalem a 7 semanas de segunda a sábado mais 3 dias, o que ocorreu numa quarta-feira.
Resposta: C

7) Observando-se que

$$f(n + 1) = \frac{2 . f(n) + 1}{2} = \frac{2 . f(n)}{2} + \frac{1}{2} = f(n) + \frac{1}{2},$$ a

sequência definida por $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(n + 1) = f(n) + \frac{1}{2} \end{cases}$ é uma P.A. cujo

primeiro termo é f(1) = 2 e cuja razão é $r = \frac{1}{2}$, assim:

$$f(101) = f(1) + 100 . r = 2 + 100 . \frac{1}{2} = 2 + 50 = 52$$

Resposta: D

8) I) $\begin{array}{r|l} 1\,492 & 15 \\ \hline 7 & 99 \end{array} \Rightarrow 1492 + (15 - 7) = 1500$ é múltiplo de 15

II) $\begin{array}{r|l} 3\,427 & 15 \\ \hline 7 & 228 \end{array} \Rightarrow 3\,427 - 7 = 3\,420$ é múltiplo de 15

III) Os múltiplos de 15 entre 1 492 e 3 427 estão em P.A. com $a_1 = 1\,500$, r = 15 e $a_n = 3\,420$, assim:
$a_n = a_1 + (n - 1). r \Rightarrow 3\,420 = 1\,500 + (n - 1) . 15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\,420 = 1\,500 + 15n - 15 \Leftrightarrow 1\,935 = 15n \Leftrightarrow n = 129$
Resposta: 129

FRENTE 3 – ÁLGEBRA E TRIGONOMETRIA

Módulo 1 – Potenciação

1) $1^4 = 1$
2) $0^3 = 0$
3) $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$
4) $(-5)^3 = (-5) . (-5) . (-5) = -125$
5) $-5^3 = -(5 . 5 . 5) = -125$
6) $5^2 = 25$
7) $(-5)^2 = (-5) . (-5) = 25$
8) $-5^2 = -(5 . 5) = -25$
9) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
10) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$
11) $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = \frac{-1}{25}$
12) $5^0 = 1$
13) $(-5)^0 = 1$
14) $-5^0 = -(5^0) = -1$
15) $(-1)^0 + (-6) : (-2) - 2^4 = 1 - 6 : (-2) - 16 = 1 + 3 - 16 = -12$
Resposta: B

16) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} . \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} + \left(\frac{2}{1}\right)^2 . \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{10}{1} = \frac{49}{4}$

Resposta: E

17) $\dfrac{3^{-1} + 5^{-1}}{2^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{5 + 3}{15}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{15} . \frac{2}{1} = \frac{16}{15}$

Resposta: D

18) $\dfrac{(-5)^2 - 3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^0}{3^{-2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \dfrac{25 - 9 + 1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}} = \dfrac{17}{\frac{73}{90}} =$

$= \frac{17 . 90}{73} = \frac{1530}{73}$

Resposta: C

19) $\frac{2^{100}}{2^1} = 2^{100 - 1} = 2^{99}$
Resposta: C

20) número de pessoas = $6 . 6 . 6 + 1 = 6^3 + 1 = 217$
Resposta: A

21) I) $x = (2^2)^3 = 2^6$
II) $y = 2^{2^3} = 2^{2.2.2} = 2^8$
III) $z = 2^{3^2} = 2^{3.3} = 2^9$
IV) $x . y . z = 2^6 . 2^8 . 2^9 = 2^{6 + 8 + 9} = 2^{23} = 2^n \Leftrightarrow n = 23$

22) $\dfrac{(5,2)^4 \,.\, (10,3)^3}{(9,9)^2} \cong \dfrac{5^4 \,.\, 10^3}{10^2} \cong 5^4 \,.\, 10 \cong 6250$

Resposta: E

23) I) 1 caracter = 8 bits = 1 byte

II) 1 Kb = 2^{10} bytes

III) 1 Mb = 2^{10} Kb

IV) 1 Gb = 2^{10} Mb

V) n = 160 Gb = $160 \,.\, 2^{10}$ Mb = $160 \,.\, 2^{10} \,.\, 2^{10}$ Kb =

= $160 \,.\, 2^{10} \,.\, 2^{10} \,.\, 2^{10}$ bytes = $160 \,.\, 2^{30}$ caracteres

Resposta: B

24) a) $a = 3^3 = 27$

$b = (-2)^3 = -8$

$c = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

$d = (-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{-1}{8}$

b) ordem crescente: $b < d < c < a$

25) I) $M_{sol} = 1{,}98 \,.\, 10^{30}$ kg $= 19{,}8 \,.\, 10^{29}$ kg

II) $M_{gli} = \dfrac{1}{3} M_{sol} = \dfrac{19{,}8 \,.\, 10^{29}}{3}$ kg =

$= 6{,}6 \,.\, 10^{29}$ kg $= \dfrac{6{,}6 \,.\, 10^{29}}{10^3}$ t $= 6{,}6 \,.\, 10^{26}$ t

Resposta: D

26) $(0{,}2)^3 + (0{,}16)^2 = \underbrace{0{,}2 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}2}_{0{,}008} + \underbrace{0{,}16 \,.\, 0{,}16}_{0{,}0256} = 0{,}0336$

Resposta: B

27) a) *Verdadeira*: $x^2 = 4 \Rightarrow (x^2)^3 = (4)^3 \Rightarrow x^6 = 64$

b) *Falsa*: $x^6 = 64 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{64} = \pm \sqrt[6]{2^6} = \pm 2$

c) *Verdadeira*: $(2^2)^3 < 2^{2^3} \Rightarrow 2^6 < 2^8$

d) *Verdadeira*: $10^x = 0{,}2 \Rightarrow (10^x)^2 = (0{,}2)^2 \Rightarrow 10^{2x} = 0{,}04$

e) *Verdadeira*: $2^{n+2} + 2^n = 2^n \,.\, 2^2 + 2^n = 2^n(2^2 + 1) = 5 \,.\, 2^n$

Resposta: B

28) $\dfrac{2^{n+4} - 2 \,.\, 2^n}{2 \,.\, 2^{n+3}} = \dfrac{2^n \,.\, 2^4 - 2 \,.\, 2^n}{2 \,.\, 2^n \,.\, 2^3} =$

$= \dfrac{2^n(2^4 - 2)}{2^n \,.\, 2^4} = \dfrac{16 - 2}{16} = \dfrac{7}{8}$

Resposta: B

29) $5^{3a} = 64 \Rightarrow (5^a)^3 = (4)^3 \Leftrightarrow 5^a = 4^1 \Leftrightarrow 5^{-a} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

Resposta: E

30) $10^{2x} = 25 \Rightarrow (10^x)^2 = (5)^2 \Leftrightarrow 10^x = 5 \Leftrightarrow 10^{-x} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

Resposta: B

31) $7^{5y} = 243 \Rightarrow (7^y)^5 = (3)^5 \Leftrightarrow 7^y = 3 \Leftrightarrow 7^{-y} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

Resposta: A

32) $2^{31} \,.\, 5^{26} = 2^5 \,.\, 2^{26} \,.\, 5^{26} = 32 \,.\, (2 \,.\, 5)^{26} = \underbrace{32 \,.\, 10^{26}}_{\text{28 algarismos}}$

Resposta: C

33) $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 = 6 \,.\, 6^6 = 6^7$

Resposta: B

■ Módulo 2 – Radiciação

1) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

2) $-\sqrt{81} = -\sqrt{9^2} = -9$

3) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

4) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

5) $\sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{6 + 2}}} =$

$= \sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{8}}} = \sqrt{8 + \sqrt{14 + 2}} = \sqrt{8 + \sqrt{16}} =$

$= \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \,.\, 4} = \sqrt{3} \,.\, \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$

Resposta: A

6) $\sqrt{2352} = \sqrt{2^4.3^1.7^2} = 2^2.7^1.\sqrt{3} = 28\sqrt{3}$

Resposta: C

7) $\sqrt{8} - \sqrt{18} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2 \,.\, 2^2} - \sqrt{2 \,.\, 3^2} + 2\sqrt{2} =$

$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Resposta: A

8) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{2 \,.\, 3^2} + \sqrt{2 \,.\, 5^2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

Resposta: C

9) I) $7^3 = 343$

II) $8^3 = 512$

III) $343 < 389 < 512 \Rightarrow \sqrt[3]{343} < \sqrt[3]{389} < \sqrt[3]{512} \Rightarrow 7 < \sqrt[3]{389} < 8$

Resposta: B

10) I) $A = \sqrt{3} \,.\, \sqrt{13} = \sqrt{3.13} = \sqrt{39}$

II) $6^2 = 36$

III) $7^2 = 49$

IV) $36 < 39 < 49 \Rightarrow \sqrt{36} < \sqrt{39} < \sqrt{49} \Rightarrow 6 < A < 7$

Resposta: A

11) $\sqrt[3]{7+\sqrt{3-\sqrt{1+\sqrt{9}}}} = \sqrt[3]{7+\sqrt{3-\sqrt{1+3}}} =$

$= \sqrt[3]{7+\sqrt{3-2}} = \sqrt[3]{7+1} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Resposta: D

12) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28}+2^{30}}{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{1 . 2^{28}+2^2 . 2^{28}}{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{5 . 2^{28}}{10}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{2^{28}}{2}} = \sqrt[3]{2^{27}} = \sqrt[3]{(2^9)^3} = 2^9$

Resposta: D

13) $2\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt{\sqrt[3]{2 . 2^3}} = 2\sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^4 . 2^6} =$

$= \sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[2.3]{2^{2 . 5}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$

14) $a.\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{a^{-1}.a^2\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{-1}.\sqrt{a^{-1}}}} =$

$= \sqrt{\sqrt{a^{-1}. a^2\sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt{a . \sqrt{a^{-1}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^{-1}.a^2}}} =$

$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a}$

Resposta: D

15) $\begin{cases} y = 16 \\ x = 1{,}25 \end{cases} \Rightarrow y^x = 16^{1{,}25} = (2^4)^{1{,}25} = 2^5 = 32$

Resposta: D

16) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1) . (\sqrt{3}+1)} =$

$= \dfrac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{8}{2} = 4$

Resposta: B

17) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} . \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+3}{3}$

Resposta: D

18) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} . \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Resposta: A

■ Módulo 3 – Fatoração

1) $12a^3b^2 - 30a^2b^3 = 6a^2b^2(2a - 5b)$

2) $6ab + 4b^3 + 15a^3 + 10a^2b^2 =$

$= 2b(3a + 2b^2) + 5a^2(3a + 2b^2) = (3a + 2b^2) . (2b + 5a^2)$

3) $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + 1(b + 1) = (b + 1) . (a + 1)$

4) $ab + a - b - 1 = a(b + 1) - 1(b + 1) = (b + 1) . (a - 1)$

5) $xy + 3x + 4y + 12 = x(y + 3) + 4(y + 3) = (y + 3) . (x + 4)$

6) $\dfrac{ab + a + b + 1}{ab - a + b - 1} = \dfrac{a(b + 1) + 1(b + 1)}{a(b - 1) + 1(b - 1)} =$

$= \dfrac{(b + 1) . (a + 1)}{(b - 1) . (a + 1)} = \dfrac{b + 1}{b - 1}$

7) $a^2 - 25 = a^2 - 5^2 = (a + 5) . (a - 5)$

8) $x^2 - 1 = (x + 1) . (x - 1)$

9) $144 - 81a^2b^2 = 9 . (16 - 9a^2b^2) = 9 . (4 + 3ab) . (4 - 3ab)$

10) $x^4 - 1 = (x^2)^2 - (1)^2 = (x^2 + 1) . (x^2 - 1) = (x^2 + 1) . (x + 1) . (x - 1)$

11) $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{9}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{81}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{1}{9}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{9}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{81}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{1}{81}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{81}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) =$

$= \left(1 - \dfrac{1}{6561}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{6561}\right) = 1 - \left(\dfrac{1}{6561}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{16}$

Resposta: A

12) $934287^2 - 934286^2 = (934287 + 934286) . (934287 - 934286) =$

$= 1868573 . 1 = 1868573$

Resposta: A

13) Para $x = -0{,}1$ e $y = 0{,}001$, temos:

$\dfrac{-x^2 + xy}{y} = \dfrac{-x\,(x - y)}{y} =$

$= \dfrac{0{,}1(-0{,}1 - 0{,}001)}{0{,}001} = \dfrac{0{,}1(-0{,}101)}{0{,}001} =$

$= -0{,}1 . \dfrac{0{,}101}{0{,}001} = \dfrac{-1}{10} . 101 = -10{,}1$

14) Para $a = 0{,}1$ e $b = 0{,}2$, temos:

$\dfrac{a^2b^2 - a^3b}{b^2 - a^2} = \dfrac{a^2b(b - a)}{(b + a)(b - a)} =$

$= \dfrac{a^2b}{a + b} = \dfrac{(0{,}1)^2 . 0{,}2}{0{,}1 + 0{,}2} = \dfrac{0{,}002}{0{,}3} = \dfrac{2 . 10^{-3}}{3 . 10^{-1}} =$

$= \dfrac{2}{3} . 10^{-2} = \dfrac{2}{3 . 100} = \dfrac{1}{3 . 50} = \dfrac{1}{150}$

Resposta: B

15) Para $x = -0{,}1$ e $y = 0{,}01$, temos:

$$\frac{xy - x^2}{\sqrt{y}} = \frac{x(y - x)}{\sqrt{y}} = \frac{-0{,}1(0{,}01 + 0{,}1)}{\sqrt{0{,}01}} =$$

$$= \frac{-0{,}1 \,.\, 0{,}11}{\sqrt{\dfrac{1}{100}}} = \frac{-0{,}1 \,.\, 0{,}11}{0{,}1} = -0{,}11$$

Resposta: A

16) $(2 + 3m)^2 = 2^2 + 2 \,.\, 2 \,.\, 3m + (3m)^2 = 4 + 12m + 9m^2$

17) $(a - 3)^2 = a^2 - 2 \,.\, a \,.\, 3 + (3)^2 = a^2 - 6a + 9$

18) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \,.\, \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{15} + 3 =$
$= 8 + 2\sqrt{15}$

19) $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 2 \,.\, 2 \,.\, a + 2 = (a + 2)^2$

20) $9a^2 + 30ab + 25b^2 = (3a)^2 + 2 \,.\, (3a) \,.\, (5b) + (5b)^2 = (3a + 5b)^2$

21) $1 - 18x^2 + 81x^4 = 1^2 + 2 \,.\, 1 \,.\, (-9x^2) + (-9x^2)^2 = (1 - 9x^2)^2$

22) $$\frac{a^3 + a^2b}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{a^2\,(a + b)}{(a + b)^2} = \frac{a^2}{(a + b)}$$

23) $$\frac{x^2 + xy}{xy - y^2} \,.\, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{x(x + y) \,.\, (x + y) \,.\, (x - y)}{y(x - y) \,.\, (x + y)^2} =$$

$$= \frac{x(x - y) \,.\, (x + y)^2}{y(x - y) \,.\, (x + y)^2} = \frac{x}{y}$$

Resposta: E

24) $$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 2x + 1} - \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{2x^2 + x + 3 - [(x + 2) \,.\, (x + 1)]}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + x + 3 - x^2 - 3x - 2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^2} = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2$$

Resposta: A

25) $$\left(\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b}\right) \,.\, \frac{a + b}{2ab} =$$

$$= \left(\frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{(a - b) \,.\, (a + b)}\right) \,.\, \frac{a + b}{2ab} =$$

$$= \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{(a - b) \,.\, (a + b)}\right) \,.\, \frac{a + b}{2ab} =$$

$$= \frac{4ab}{(a - b) \,.\, (a + b)} \,.\, \frac{(a + b)}{2ab} = \frac{2}{a - b}$$

Resposta: B

26) $(\sqrt{12} + \sqrt{3} + 1)^2 = (2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1)^2 = (3\sqrt{3} + 1)^2 =$
$= (3\sqrt{3})^2 + 2 \,.\, 3\sqrt{3} + (1)^2 = 28 + 6\sqrt{3} = a + b\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 28 \text{ e } b = 6$
Resposta: E

27) I) $$M = a + \frac{b - a}{1 + ab} = \frac{a(1 + ab) + b - a}{(1 + ab)} =$$

$$= \frac{a^2b + b}{(1 + ab)} = \frac{b(a^2 + 1)}{(ab + 1)}$$

II) $$N = 1 - \frac{ab - a^2}{1 + ab} = \frac{1(1 + ab) - (ab - a^2)}{(1 + ab)} =$$

$$= \frac{1 + a^2}{1 + ab} = \frac{(a^2 + 1)}{(ab + 1)}$$

III) $$\frac{M}{N} = \frac{\dfrac{b(a^2 + 1)}{ab + 1}}{\dfrac{a^2 + 1}{ab + 1}} = \frac{b(a^2 + 1)}{a^2 + 1} = b$$

Resposta: B

28) $$\frac{a + b}{a^2 - ab} \,.\, \frac{a^2b - ab^2}{a^2b - b^3} = \frac{(a + b) \,.\, ab(a - b)}{a(a - b) \,.\, b(a^2 - b^2)} =$$

$$= \frac{(a + b)}{(a + b)(a - b)} = \frac{1}{(a - b)}$$

Resposta: B

29) $$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} = \frac{2x^2 \,.\, (1) - x(x + 1)}{(x + 1) \,.\, (x - 1)} =$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 - x}{(x + 1) \,.\, (x - 1)} = \frac{x^2 - x}{(x + 1) \,.\, (x - 1)} =$$

$$= \frac{x(x - 1)}{(x + 1) \,.\, (x - 1)} = \frac{x}{x + 1}$$

Resposta: E

30) $$\frac{2x - 1}{x - 2} - \frac{3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(2x - 1).(x + 2) - (3x + 2)}{(x + 2) \,.\, (x - 2)} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 4x - 4}{(x + 2) \,.\, (x - 2)} = \frac{2x^2 - 4}{(x + 2) \,.\, (x - 2)} = \frac{2(x^2 - 2)}{x^2 - 4}$$

Resposta: A

31) Para $x = 4$ e $y = \sqrt{3}$, temos:

$$\frac{(x^4 - y^4) \,.\, (x + y)^2}{(x^2 + y^2) \,.\, (x^2 + 2xy + y^2)} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2) \,.\, (x^2 - y^2) \,.\, (x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + y^2) \,.\, (x^2 + 2xy + y^2)} = x^2 - y^2 =$$

$$= 4^2 - (\sqrt{3})^2 = 16 - 3 = 13$$

32) Se $m + n + p = 6$, $mnp = 2$ e $mn + mp + np = 11$, então:
$(m + n + p)^2 = 6^2 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2(mn + mp + np) = 36 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2 \,.\, 11 = 36 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 14$

Portanto, $\dfrac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp} = \dfrac{14}{2} = 7$

Resposta: B

33) $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab = (a^2 - 2ab + b^2) - c^2 = (a - b)^2 - (c)^2 =$
$= [(a - b) + c] \,.\, [(a - b) - c] = (a - b + c) \,.\, (a - b - c)$

34) $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) \,.\, c + c^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

35) $x + \dfrac{1}{x} = b \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 \,.\, x \,.\, \dfrac{1}{x} = b^2 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = b^2 - 2$

■ Módulo 4 – Funções Trigonométricas de um Ângulo Agudo

1) Pitágoras: $2^2 = 1^2 + (AB)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$

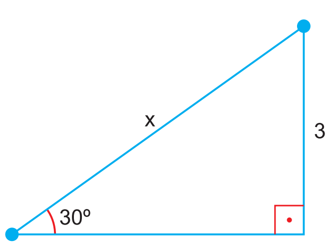
$\text{sen } B = \dfrac{1}{2}$, $\cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } B = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{sen } C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos C = \dfrac{1}{2}$ e $\text{tg } C = \sqrt{3}$

2) $\text{sen } \alpha = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 8$

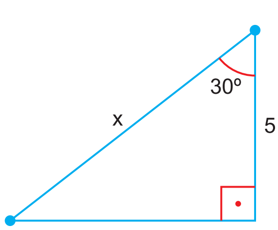
3) $\cos \alpha = 0{,}8 \Rightarrow \dfrac{x}{20} = 0{,}8 \Rightarrow x = 16$

4)



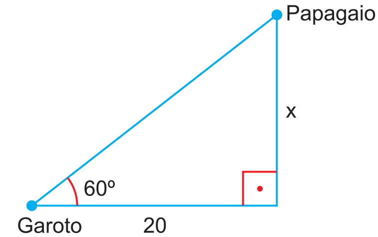
$\text{sen } 30° = \dfrac{3}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{x} \Rightarrow x = 6$

5)



$\cos 30° = \dfrac{5}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5}{x} \Rightarrow x = \dfrac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

6)



$\text{tg } 60° = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 20 \,.\, \sqrt{3} \Rightarrow x = 20 \,.\, 1{,}73 \Rightarrow x \simeq 34{,}6$

Resposta: C

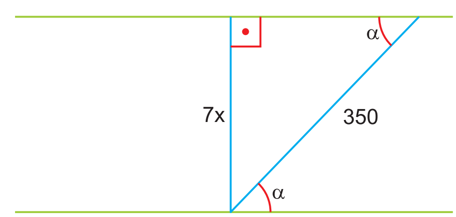
7) Seja x, em metros, o comprimento da sombra do edifício:

$\text{tg } 30° = \dfrac{80}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{80}{x} \Rightarrow x = \dfrac{240}{\sqrt{3}} \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 80 \,.\, \sqrt{3} \simeq 80 \,.\, 1{,}7 \simeq 136$

Resposta: A

8) Seja x, em centímetros, a altura de cada degrau:



I) $\cos \alpha = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$

II) $\text{sen } \alpha = \dfrac{7x}{350} \Rightarrow \dfrac{7x}{350} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow x = 30$

Resposta: C

9) Seja x, em metros, o comprimento do cabo.

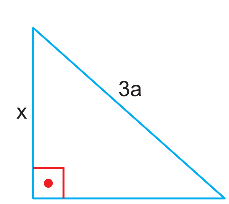
I) $\text{sen } 30° = \dfrac{120}{x} \Rightarrow 0{,}5 = \dfrac{120}{x} \Rightarrow x = 240$

II) 5% . 240 = 12

III) 240 + 12 = 252

Resposta: E

10)



I) Pitágoras: $(3a)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 8a^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}a$, logo o menor lado é a.

II) Seja α o ângulo oposto ao menor lado:

$\cos \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}a}{3a} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

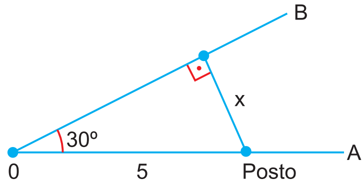
Resposta: B

11) I) tg 60° = $\dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = \sqrt{3}\,y$

II) tg 30° = $\dfrac{x}{300} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{300} \Rightarrow x = 100\sqrt{3}$

Então $100\sqrt{3} = \sqrt{3}\,.\,y \Rightarrow y = 100$

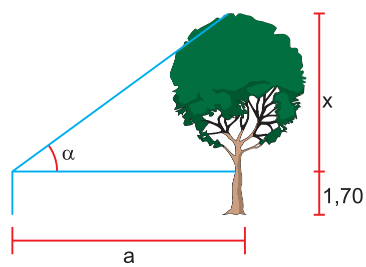
12)



sen 30° = $\dfrac{x}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2{,}5$

Resposta: C

13)



I) tg α = $\dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a\,.\,\text{tg}\,\alpha$

II) A altura da árvore é 1,70 + x = 1,70 + a . tg α

14) $\dfrac{\sec x + \text{tg}\,x}{\cos x + \text{cotg}\,x} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}}{\cos x + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}} =$

$= \dfrac{\dfrac{1 + \text{sen}\,x}{\cos x}}{\dfrac{\text{sen}\,x\,.\,\cos x + \cos x}{\text{sen}\,x}} = \dfrac{\dfrac{1 + \text{sen}\,x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x\,.\,(1 + \text{sen}\,x)}{\text{sen}\,x}} =$

$= \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{\cos x}\,.\,\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x\,.\,(1 + \text{sen}\,x)} =$

$= \dfrac{1}{\cos x}\,.\,\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} = (\sec x)\,.\,(\text{tg}\,x)$

Resposta: D

15) f(60°) = sen 60° + cos 60° + cotg 60° +
+ cossec 60° – tg 60° – sec 60°

$f(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - 2$

$f(60°) = \dfrac{3\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 12}{6}$

$f(60°) = \dfrac{3\sqrt{3} - 9}{6}$

$f(60°) = \dfrac{\sqrt{3} - 3}{2}$

Resposta: B

16) sen a + cos a = m ⇒ $(\text{sen}\,a + \cos a)^2 = m^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2 a + 2\,\text{sen}\,a\,.\,\cos a + \cos^2 a = m^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}\,a\,.\,\cos a = \dfrac{m^2 - 1}{2}$

Resposta: B

17) y = (sec a – cos a) . (cossec a – sen a) . (tg a + cotg a)=

$= \left(\dfrac{1}{\cos a} - \cos a\right).\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,a} - \text{sen}\,a\right).\left(\dfrac{\text{sen}\,a}{\cos a} + \dfrac{\cos a}{\text{sen}\,a}\right) =$

$= \left(\dfrac{1 - \cos^2 a}{\cos a}\right).\left(\dfrac{1 - \text{sen}^2 a}{\text{sen}\,a}\right).\left(\dfrac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\text{sen}\,a\,.\,\cos a}\right) =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 a}{\cos a}\,.\,\dfrac{\cos^2 a}{\text{sen}\,a}\,.\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,a\,.\,\cos a}\right) =$

$= \text{sen}\,a\,.\,\cos a\,.\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,a\,.\,\cos a}\right) = 1$

18) $y = \dfrac{\text{sen}\,a - \text{sen}\,b}{\cos a - \cos b} + \dfrac{\cos a + \cos b}{\text{sen}\,a + \text{sen}\,b} =$

$= \dfrac{(\text{sen}\,a - \text{sen}\,b).(\text{sen}\,a + \text{sen}\,b) + (\cos a + \cos b).(\cos a - \cos b)}{(\text{sen}\,a + \text{sen}\,b).(\cos a - \cos b)} =$

$= \dfrac{(\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b) + (\cos^2 a - \cos^2 b)}{(\text{sen}\,a + \text{sen}\,b).(\cos a - \cos b)} =$

$= \dfrac{1 - 1}{(\text{sen}\,a + \text{sen}\,b).(\cos a - \cos b)} = 0$

19) Para tg x = t, temos:

$y = \dfrac{\text{sen}^2 x + \text{sen}\,x\,.\,\cos x}{\text{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\text{sen}\,x\,.\,\cos x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} =$

$= \dfrac{\text{tg}^2 x + \text{tg}\,x}{\text{tg}^2 x - 1} = \dfrac{t^2 + t}{t^2 - 1} = \dfrac{t\,.\,(t + 1)}{(t + 1).(t - 1)} = \dfrac{t}{t - 1}$

20) $\dfrac{\text{tg a} + \text{tg b}}{\text{cotg a} + \text{cotg b}} = \dfrac{\text{tg a} + \text{tg b}}{\dfrac{1}{\text{tg a}} + \dfrac{1}{\text{tg b}}} =$

$= \dfrac{\text{tg a} + \text{tg b}}{\dfrac{\text{tg b} + \text{tg a}}{\text{tg a . tg b}}} = (\text{tg a} + \text{tg b}) \,.\, \dfrac{\text{tg a . tg b}}{(\text{tg a} + \text{tg b})} = \text{tg a . tg b}$

Resposta: A

21) Para $\cos x = \dfrac{1}{3}$, temos:

$y = \dfrac{\text{cossec x} - \sec x}{\text{cotg x} - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen x}} - \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\text{sen x}} - 1} =$

$= \dfrac{\dfrac{\cos x - \text{sen x}}{\text{sen x . cos x}}}{\dfrac{\cos x - \text{sen x}}{\text{sen x}}} = \dfrac{\cos x - \text{sen x}}{\text{sen x . cos x}} \,.\, \dfrac{\text{sen x}}{\cos x - \text{sen x}} =$

$= \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$

22) Para $\text{tg a} = \dfrac{1}{2}$, temos:

$y = \dfrac{\text{cossec a} - \text{sen a}}{\sec a - \cos a} = \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen a}} - \text{sen a}}{\dfrac{1}{\cos a} - \cos a} =$

$= \dfrac{\dfrac{1 - \text{sen}^2 a}{\text{sen a}}}{\dfrac{1 - \cos^2 a}{\cos a}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 a}{\text{sen a}}}{\dfrac{\text{sen}^2 a}{\cos a}} =$

$= \dfrac{\cos^2 a}{\text{sen a}} \,.\, \dfrac{\cos a}{\text{sen}^2 a} = \dfrac{\cos^3 a}{\text{sen}^3 a} =$

$= \text{cotg}^3 a = \dfrac{1}{\text{tg}^3 a} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{8}} = 8$

23) Para $\text{sen x} = \dfrac{1}{3}$, temos:

$\cos^4 x - \text{sen}^4 x = (\cos^2 x + \text{sen}^2 x).(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) =$

$= \; 1 \,.\, (1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) = 1 - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9}$

Resposta: A

FRENTE 4 – GEOMETRIA PLANA

■ Módulo 1 – Introdução ao Estudo da Geometria Plana e Triângulos

1) Como r // s, então A + B = 180° e, pelo enunciado, B = 3A, assim:

$A + B = 180° \Rightarrow A + 3A = 180° \Leftrightarrow 4A = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{180°}{4} = 45°$ e $B = 3A = 3 \,.\, 45° = 135°$

Logo, B – A = 135° – 45° = 90°

Resposta: A

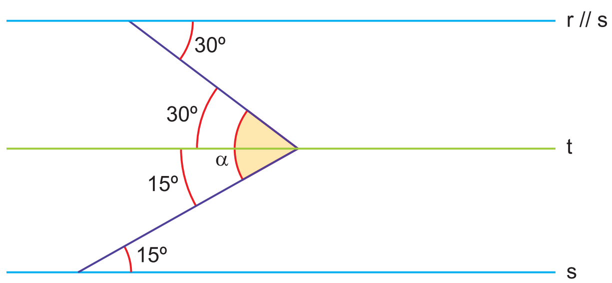
2) $x - 25° + 2x + 40° = 180°$ (os ângulos são colaterais) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 15° = 180° \Leftrightarrow 3x = 180° - 15° \Leftrightarrow 3x = 165° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{165°}{3} \Leftrightarrow x = 55°$

Resposta: A

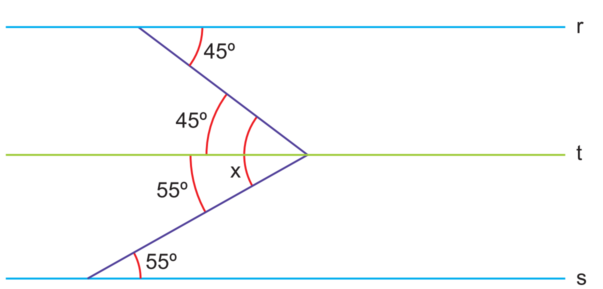
3)



Traçando uma reta t, pelo vértice do ângulo α, paralela às retas r e s, tem-se: α = 15° + 30° ⇔ α = 45°

Resposta: D

4)

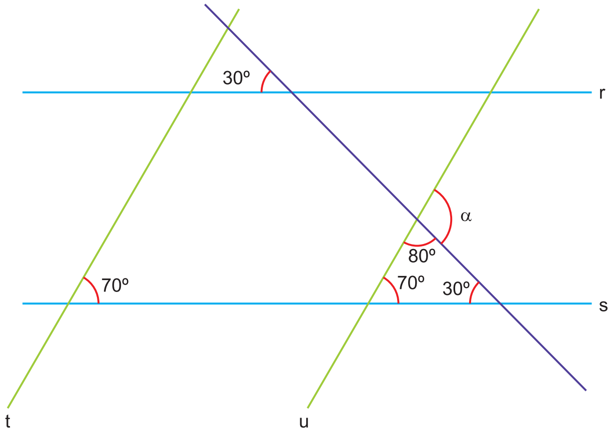


Traçando uma reta t, pelo vértice do ângulo 3, paralela às retas r e s, e sendo x a medida do ângulo 3, tem-se:

x = 45° + 55° = 100°

Resposta: E

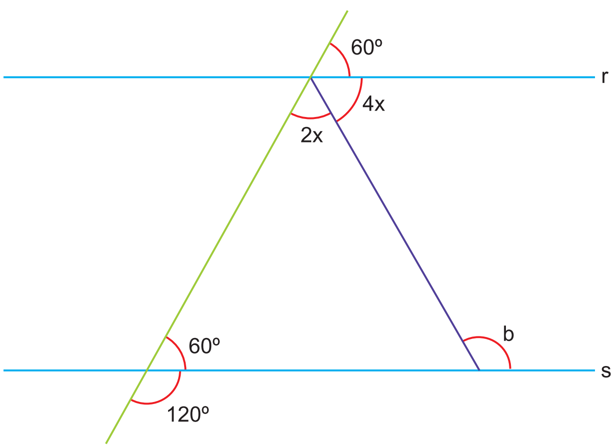
5)



$\alpha + 80° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 180° - 80° \Leftrightarrow \alpha = 100°$

Resposta: A

6) **Conforme a figura:**



$2x + 4x + 60° = 180° \Leftrightarrow 6x = 180° - 60° \Leftrightarrow$

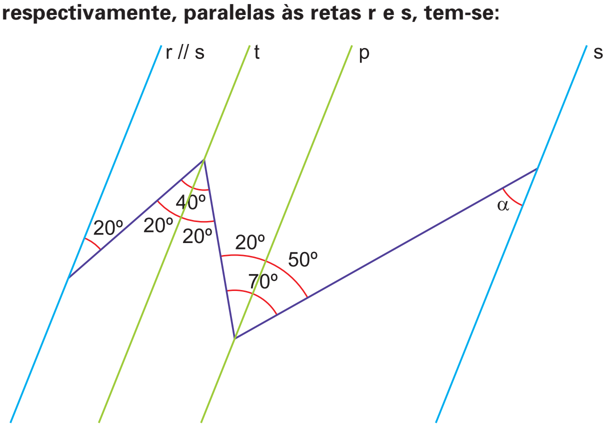
$\Leftrightarrow 6x = 120° \Leftrightarrow x = \dfrac{120°}{6} \Leftrightarrow x = 20°$

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo,

$b = 60° + 2x = 60° + 2 \cdot 20° = 60° + 40° = 100°$

Resposta: A

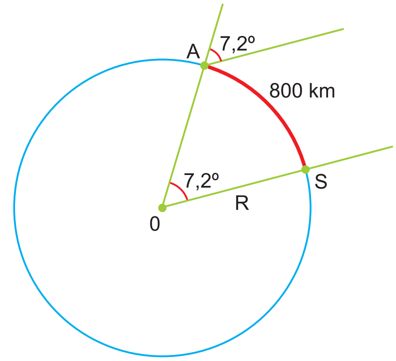
7) **Traçando as retas t e p, pelos vértices dos ângulos 40° e 70°, respectivamente, paralelas às retas r e s, tem-se:**



$\alpha = 50°$

Resposta: D

8)



ângulo central	comprimento do arco
7,2°	800 km
360°	C

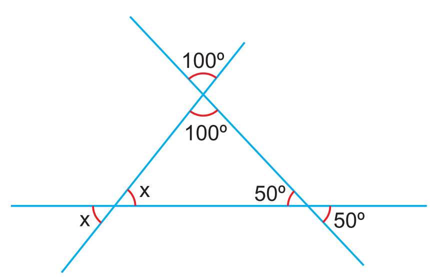
Como as grandezas são diretamente proporcionais, tem-se:

$\dfrac{7{,}2°}{360°} = \dfrac{800\text{ km}}{C} \Leftrightarrow \dfrac{1}{50} = \dfrac{800\text{ km}}{C} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 50 \cdot 800\text{ km} = 40\,000\text{ km}$

Resposta: 40 000 km

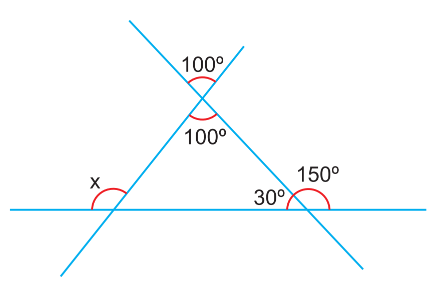
9)



$x + 100° + 50° = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 100° - 50° = 30°$

Resposta: A

10)

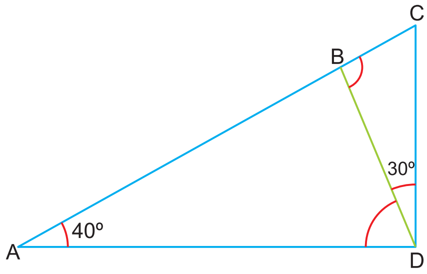


Pelo Teorema do ângulo externo,

$x = 100° + 30° \Leftrightarrow x = 130°$

Resposta: E

11)



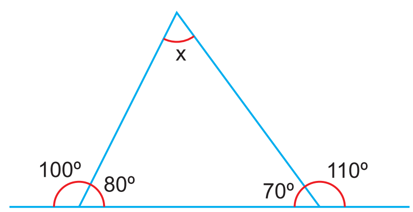
I) $\hat{ADC} = 90° \Rightarrow \hat{ADB} = 90° - 30° = 60°$

II) $\hat{C} = 180° - 90° - 40° \Leftrightarrow \hat{C} = 50°$

III) No triângulo BCD, $\hat{CBD} = 180° - 50° - 30° = 100°$

Resposta: B

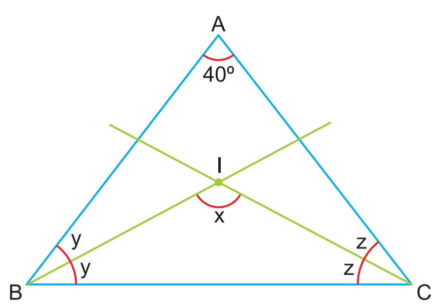
12)



$x + 80° + 70° = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 80° - 70° = 30°$

Resposta: A

13)



I) No triângulo ABC, temos:

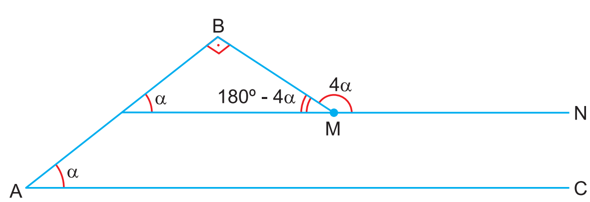
$40° + 2y + 2z = 180° \Leftrightarrow 2(y + z) = 140° \Leftrightarrow y + z = 70°$

II) No triângulo BCI, temos:

$x + y + z = 180° \Rightarrow x + 70° = 180° \Leftrightarrow x = 110°$

Resposta: C

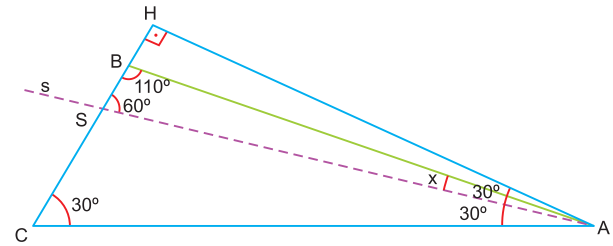
14)



$\alpha + 90° = 4\alpha \Leftrightarrow 90° = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 30°$

Resposta: B

15)



I) No triângulo AHC, temos: $\hat{A} = 180° - 90° - 30° = 60°$

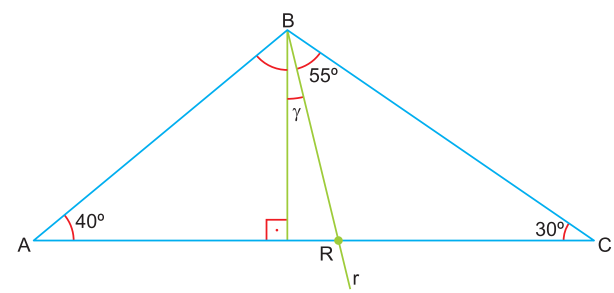
II) No triângulo AHS, temos: $\hat{HSA} = 180° - 30° - 90° = 60°$

III) No triângulo BAS, temos:

$110° + 60° + x = 180° \Leftrightarrow x = 180° - 110° - 60° = 10°$

Resposta: D

16)



I) $\hat{B} = 180° - 30° - 40° = 110°$

II) r é a bissetriz de $\hat{B}$, então $\hat{CBR} = 55°$

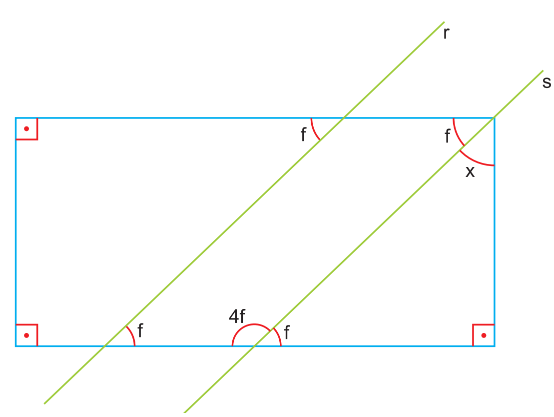
III) $\hat{BRA} = 55° + 30° = 85°$

Então, $\gamma + 90° + 85° = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma = 180° - 90° - 85° \Rightarrow \gamma = 5°$

Resposta: B

17)

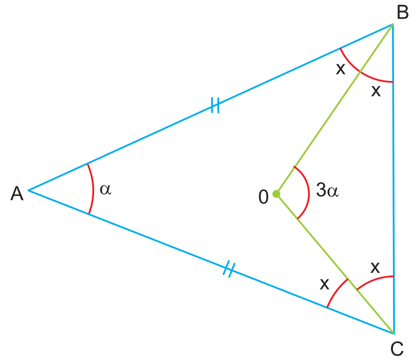


I) $4f + f = 180° \Leftrightarrow 5f = 180° \Leftrightarrow f = 36°$

II) $f + x = 90° \Leftrightarrow x = 90° - f = 90° - 36° = 54°$

Resposta: C

18)



I) No triângulo ABC, temos:
$\alpha + 2x + 2x = 180° \Leftrightarrow \alpha + 4x = 180°$

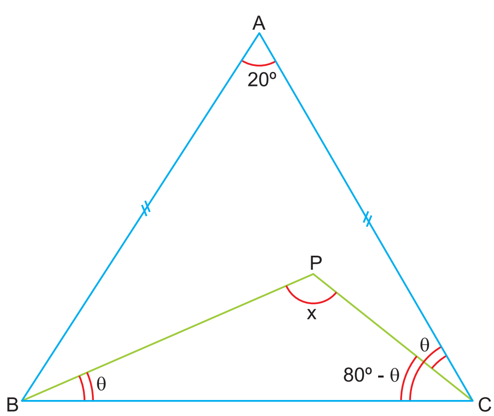
II) No triângulo BOC, temos:
$3\alpha + x + x = 180° \Leftrightarrow 3\alpha + 2x = 180°$

III) $\begin{cases} \alpha + 4x = 180° \\ 3\alpha + 2x = 180° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 4x = -180° \\ 6\alpha + 4x = 360° \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$

Resposta: D

19)



Se $\hat{A} = 20°$, então, no triângulo ABC, $\hat{B} = \dfrac{180° - 20°}{2} \Rightarrow$

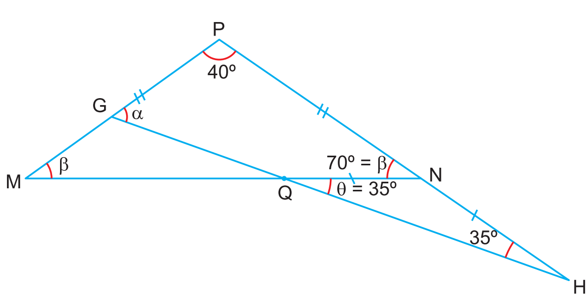
$\Rightarrow \hat{B} = 80°$ e $\hat{C} = 80°$

No triângulo BCP, tem-se: $\theta + x + 80° - \theta = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 180° - 80° = 100°$

Resposta: B

20)



Como NQ = NH então, $\theta = N\hat{Q}H = N\hat{H}Q = 35°$

Pelo Teorema do ângulo externo, no triângulo NQH, $\beta = 35° + 35° = 70°$

Como o triângulo MPN é isósceles, então

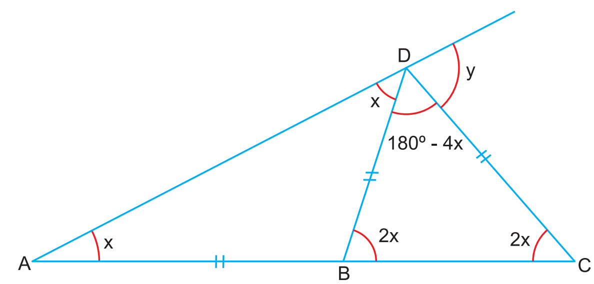
$\hat{P} = 180° - 70° - 70° = 40°$

No triângulo PGH, $40° + \alpha + 35° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 105°$

Logo, $\alpha + \beta + \theta = 105° + 70° + 35° = 210°$

Resposta: D

21)



I) No triângulo ABD, AB = BD, então $B\hat{D}A = B\hat{A}D = x$

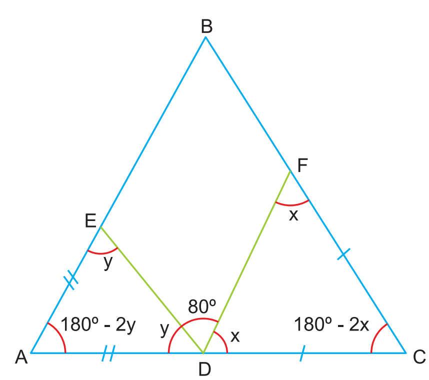
II) $C\hat{B}D$ é ângulo externo do triângulo ABD, assim, $C\hat{B}D = x + x = 2x$

III) No triângulo BCD, BD = CD, então $D\hat{C}B = C\hat{B}D = 2x$

IV) y é ângulo externo do triângulo ACD, assim, $y = x + 2x = 3x$

Resposta: A

22)



I) No triângulo ABC, BA = BC, então $\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow 180° - 2y = 180° - 2x \Leftrightarrow x = y$

II) No ponto D, $x + y + 80° = 180° \Rightarrow x = y = 50°$

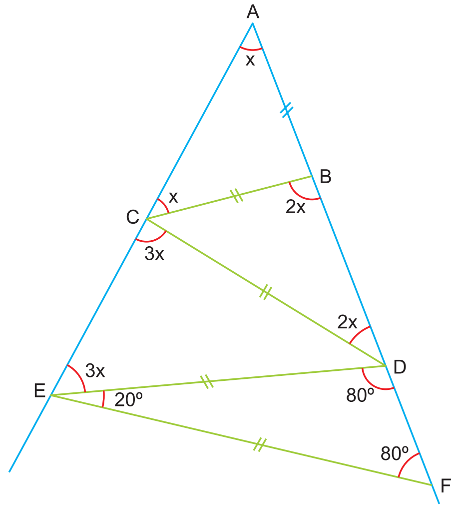
III) $\hat{A} = \hat{C} = 180° - 2 \,.\, 50° = 180° - 100° = 80°$

IV) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 80° + \hat{B} + 80° = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{B} = 20$, portanto, $A\hat{B}C = 20°$

Resposta: A

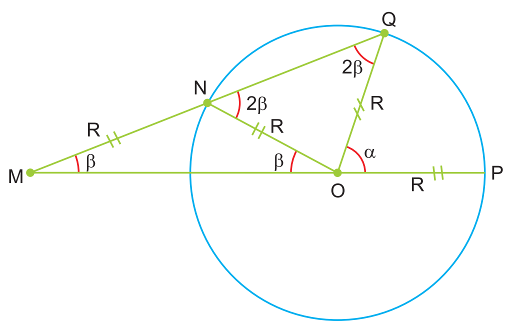
23)



$x + 3x = 80° \Leftrightarrow 4x = 80° \Leftrightarrow x = 20°$, portanto, $C\hat{A}B = 20°$

Resposta: 20°

24)



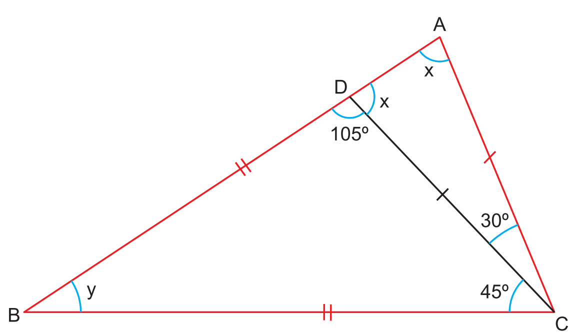
Seja R, o raio da circunferência.

Se MN = OP e OP = R, então MN = R

Logo, $\alpha = \beta + 2\beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = 3$

Resposta: C

25)



I) Como o triângulo ADC é isósceles, então:

$\hat{A} = x = \dfrac{180° - 30°}{2} \Leftrightarrow x = 75°$

II) Se $A\hat{D}C = 75°$, então, $B\hat{D}C = 105°$

III) Como AB = BC, então $\hat{A} = \hat{C} = 75°$, logo, $B\hat{C}D = 75° - 30° = 45°$

IV) No triângulo BCD, $y + 105° + 45° = 180° \Leftrightarrow y = 30°$

Então, $x + y = 75° + 30° = 105°$

Resposta: E

■ Módulo 2 – Polígonos: Definição, Classificação e Propriedades

1) O icoságono tem 20 lados $\Rightarrow n = 20$

$d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{20(20-3)}{2} = 10 \,.\, 17 = 170$

Resposta: D

2) Seja n o número de lados do polígono, então:

$n = \dfrac{d}{3} \Leftrightarrow 3n = d \Leftrightarrow 3n = \dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6n = n^2 - 3n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 6n = 0 \Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 9$, pois $n > 2$

Resposta: B

3) O decágono tem 10 lados $\Rightarrow n = 10$

$S_i = (n - 2) \,.\, 180° = (10 - 2) \,.\, 180° = 8 \,.\, 180° = 1440°$

Resposta: D

4) $a_e = \dfrac{360°}{10} = 36°$ e $a_i + a_e = 180°$, então:

$a_i = 180° - 36° = 144°$

Resposta: E

5) I) $a_i = 3a_e$ e $a_i + a_e = 180° \Leftrightarrow 3a_e + a_e = 180° \Leftrightarrow$

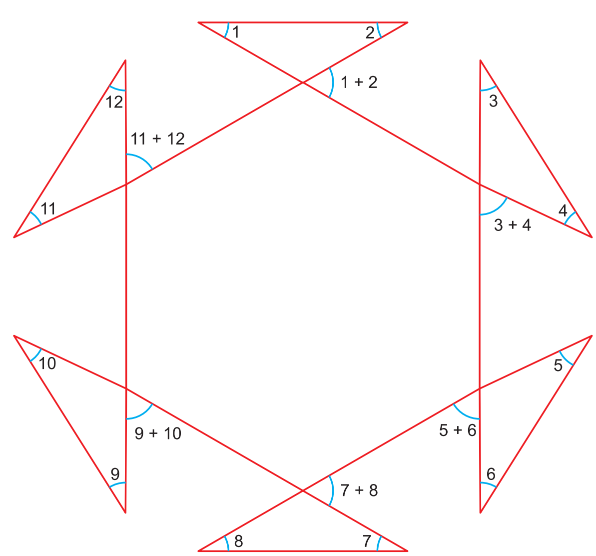
$\Leftrightarrow 4a_e = 180° \Leftrightarrow a_e = 45°$

II) $a_e = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 45° = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 45°n = 360° \Leftrightarrow n = 8$

Logo, o polígono é o octógono.

Resposta: C

6)



A figura interna é um hexágono e $S_e = 360°$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 360°$

Resposta: B

7) I) $a_e = 20° = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 20° = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 2n = 36 \Leftrightarrow n = 18$

II) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{18(18-3)}{2} = 9 \,.\, 15 = 135$

Resposta: D

8) Polígono 1: n lados e d diagonais

Polígono 2: (n + 6) lados e (d + 39) diagonais

I) $\dfrac{(n+6)\,.\,(n+6-3)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2} + 39 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+6)\,.\,(n+3)}{2} = \dfrac{n(n-3)+78}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 6n + 18 = n^2 - 3n + 78 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n + 6n + 3n = 78 - 18 \Leftrightarrow 12n = 60 \Leftrightarrow n = 5$

II) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5(5-3)}{2} = 5$

Então, temos:

Polígono 1: 5 lados e 5 diagonais

Polígono 2: 11 lados e 44 diagonais

Como o número de vértices é igual ao número de lados, a soma pedida é 5 + 5 + 11 + 44 = 65

Resposta: B

9) Sendo α o ângulo remanescente, temos:

I) $S_i = (n-2)\,.\,180° = 1900° + \alpha \Leftrightarrow 180°n - 360° = 1900° + \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 180°n - 2260°$

II) $0° < \alpha < 180° \Leftrightarrow 0° < 180°n - 2260° < 180° \Leftrightarrow$

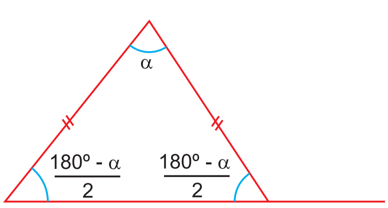
$\Leftrightarrow 2260° < 180°n < 2440° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2260°}{180°} < n < \dfrac{2440°}{180°} \Leftrightarrow 12{,}5 < n < 13{,}5 \Rightarrow n = 13$

III) $\alpha = 180°\,.\,13 - 2260° = 2340° - 2260° = 80°$

Resposta: D

10) Seja α o ângulo de cada vértice da estrela e o triângulo isósceles em cada ponta da estrela:



$\dfrac{180° - \alpha}{2}$ é ângulo externo do polígono de n lados, assim:

$\dfrac{180° - \alpha}{2} = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow 720° = n\,.\,180° - n\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\alpha = n\,.\,180° - 720° \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{(n-4)\,.\,180°}{n}$

Resposta: B

11) I) $S_i = (n-2)\,.\,180° = 2160° \Leftrightarrow n - 2 = \dfrac{216}{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 12 + 2 \Leftrightarrow n = 14$

II) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{14(14-3)}{2} = 7\,.\,11 = 77$ é o total de diagonais

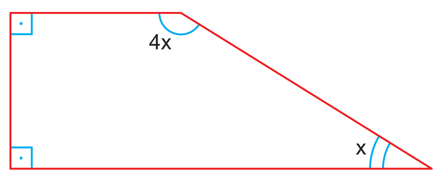
III) O número de diagonais que passam pelo centro é

$\dfrac{n}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

IV) O número de diagonais que não passam pelo centro é $77 - 7 = 70$

Resposta: C

12)

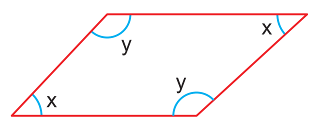


$4x + x + 90° + 90° = 360° \Leftrightarrow 5x = 360° - 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{180°}{5} = 36°$

Resposta: B

13)



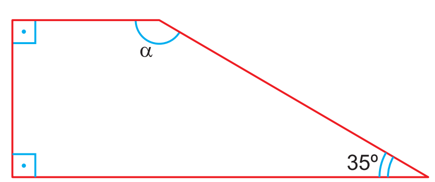
I) $x + x = 84° \Leftrightarrow 2x = 84° \Leftrightarrow x = 42°$

II) $x + y = 180° \Rightarrow y = 180° - 42° \Leftrightarrow y = 138°$

Logo, os ângulos medem: 42°, 138°, 42° e 138°.

Resposta: 42°, 138°, 42° e 138°

14)



$\alpha + 90° + 90° + 35° = 360° \Leftrightarrow \alpha = 360° - 90° - 90° - 35° = 145°$

Resposta: C

15) Todo losango é um paralelogramo, pois tem lados opostos paralelos.

Resposta: E

16) I) O triângulo APB é isósceles, pois AB = AP, então $A\hat{B}P = A\hat{P}B = \alpha$.

II) $P\hat{A}B = 90° - 60° = 30°$

III) No triângulo APB, temos:

$30° + \alpha + \alpha = 180° \Leftrightarrow 2\alpha = 150° \Leftrightarrow \alpha = 75°$

Resposta: E

17) I) O triângulo CDE é isósceles, pois CD = CE, então $C\hat{E}D = C\hat{D}E = \alpha$

II) $D\hat{C}E = 90° + 60° = 150°$

III) $\alpha + \alpha + 150° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 15°$

IV) No triângulo CEF, temos:

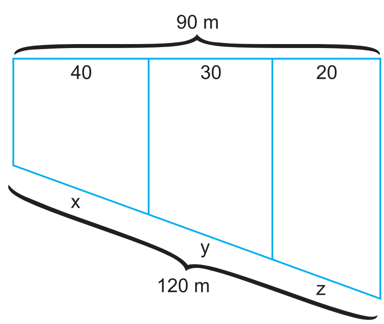
$60° + 15° + C\hat{F}E = 180° \Leftrightarrow C\hat{F}E = 105° = B\hat{F}D$

Resposta: 105°

18) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{B'C'} \Leftrightarrow 4B'C' = 16 \Leftrightarrow B'C' = 4$

Resposta: 4 cm

19)



I) $\dfrac{40}{x} = \dfrac{90}{120} \Leftrightarrow 9x = 480 \Leftrightarrow x = \dfrac{160}{3}$

II) $\dfrac{30}{y} = \dfrac{90}{120} \Leftrightarrow 9y = 360 \Leftrightarrow y = 40$

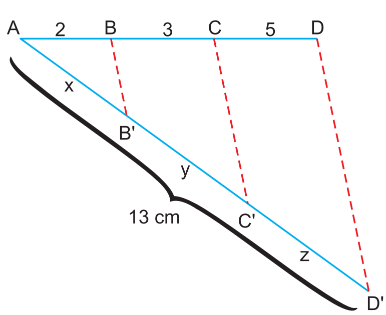
III) $\dfrac{20}{z} = \dfrac{90}{120} \Leftrightarrow 9z = 240 \Leftrightarrow z = \dfrac{80}{3}$

Resposta: $\dfrac{160}{3}$ m, 40 m e $\dfrac{80}{3}$ m

20) $\dfrac{x}{15} = \dfrac{6/5}{3} \Leftrightarrow 3x = 15 \,.\, \dfrac{6}{5} \Leftrightarrow x = 6$

Resposta: E

21)



I) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{10}{13} \Leftrightarrow 10x = 26 \Leftrightarrow x = 2,6 \Leftrightarrow AB' = 2,6$

II) $\dfrac{3}{y} = \dfrac{10}{13} \Leftrightarrow 10y = 39 \Leftrightarrow y = 3,9 \Leftrightarrow B'C' = 3,9$

III) $\dfrac{5}{z} = \dfrac{10}{13} \Leftrightarrow 10z = 65 \Leftrightarrow z = 6,5 \Leftrightarrow C'D' = 6,5$

Resposta: AB' = 2,6 cm, B'C' = 3,9 cm e C'D' = 6,5 cm

22) $\dfrac{x + 10}{x - 18} = \dfrac{x + 20}{x - 16} \Leftrightarrow (x + 10)\,.\,(x - 16) = (x - 18)(x + 20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 10x - 160 = x^2 + 20x - 18x - 360 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x - 160 = 2x - 360 \Leftrightarrow 360 - 160 = 2x + 6x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 200 = 8x \Leftrightarrow x = 25$

Resposta: 25

■ Módulo 3 – Semelhança de Triângulos

1) $\Delta ABD \sim \Delta CBE \Rightarrow \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BD}{BE} \Rightarrow \dfrac{1 + BE}{3} = \dfrac{10}{BE} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BE + (BE)^2 = 30 \Leftrightarrow (BE)^2 + BE - 30 = 0 \Rightarrow BE = 5$

Resposta: D

2) $\Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \dfrac{AB}{ED} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow \dfrac{15}{x} = \dfrac{20}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = 45 \Leftrightarrow x = \dfrac{45}{4} \Leftrightarrow x = 11,25$

Resposta: D

3) Sendo x a medida do lado do quadrado, temos:

$\Delta BDE \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DE}{AC} \Rightarrow \dfrac{1 - x}{1} = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 - 3x \Leftrightarrow x + 3x = 3 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4} = 0,75$

Resposta: B

4) Sendo x, em metros, o comprimento da sombra da estátua, temos:

$\dfrac{5}{2} = \dfrac{4 + x}{x} \Leftrightarrow 5x = 8 + 2x \Leftrightarrow 5x - 2x = 8 \Leftrightarrow 3x = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3}$

Resposta: $\dfrac{8}{3}$ m

5) Sendo x, em metros, a medida de $\overline{ED}$, pela semelhança dos triângulos AED e ABC, temos:

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{ED}{BC} \Rightarrow \dfrac{12}{20} = \dfrac{x}{10 + x} \Leftrightarrow 5x = 30 + 3x \Leftrightarrow 5x - 3x = 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15$

Resposta: A

6) $\Delta ABE \sim \Delta CDE \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{CE} \Rightarrow \dfrac{136}{50} = \dfrac{AE}{75} \Leftrightarrow 2AE = 408 \Leftrightarrow AE = 204$

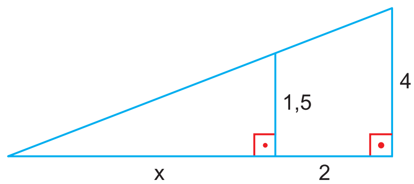
Resposta: C

7) Sendo x, em metros, a medida do raio do disco voador, então:

$\dfrac{30}{2x} = \dfrac{80}{16} \Leftrightarrow 16x = 48 \Leftrightarrow x = 3$

Resposta: A

8)



Sendo x, em metros, o comprimento da sombra da moça no chão, temos:

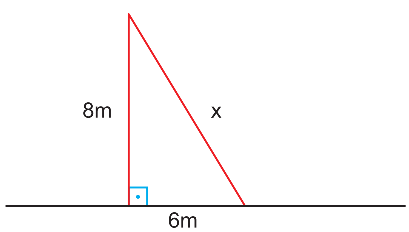
$\dfrac{4}{1,5} = \dfrac{x+2}{x} \Leftrightarrow 4x = 1,5x + 3 \Leftrightarrow 4x - 1,5x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2,5x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2,5} \Leftrightarrow x = 1,20$

Resposta: B

■ Módulo 4 – Relações Métricas nos Triângulos Retângulos

1)



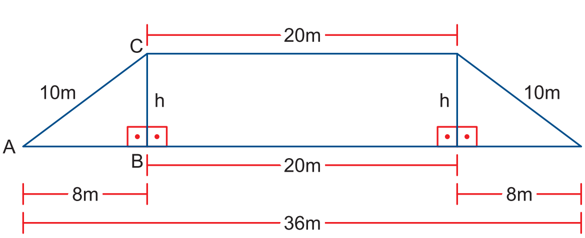
Sendo x o comprimento do cabo de energia, em metros, temos:

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

Resposta: D

2) Sendo x a medida, em metros, de cada lado não-paralelo do trapézio isósceles, temos:

$x + x = 20 \text{ m} \Leftrightarrow x = 10 \text{ m}$



No triângulo ABC, sendo h a medida em metros do trapézio, temos: $h^2 + (8 \text{ m})^2 = (10 \text{ m})^2 \Rightarrow h = 6 \text{ m}$

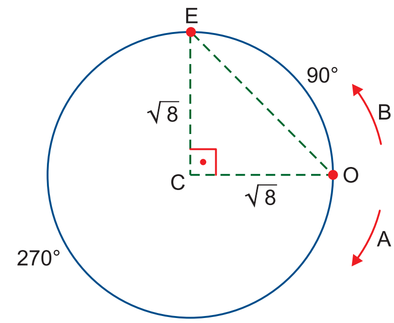
Resposta: A

3) De acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$r^2 = (r - 5)^2 + 10^2 \Leftrightarrow 10r = 125 \Leftrightarrow r = 12,5$

Resposta: C

4)



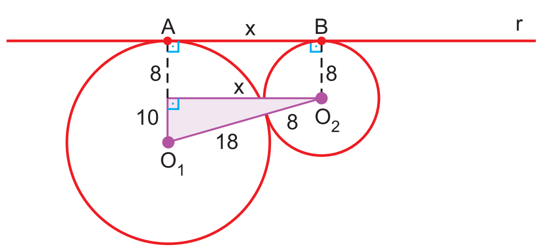
De acordo com o Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo OCE, tem-se: $(OE)^2 = (OC)^2 + (CE)^2$

Assim:

$(OE)^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 \Leftrightarrow (OE)^2 = 8 + 8 \Leftrightarrow (OE)^2 = 16 \Rightarrow OE = 4$

Resposta: D

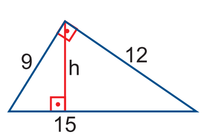
5) Fazendo AB = x, tem-se a figura a seguir:



$x^2 + 10^2 = 26^2 \Leftrightarrow x^2 + 100 = 676 \Leftrightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$

Resposta: D

6)

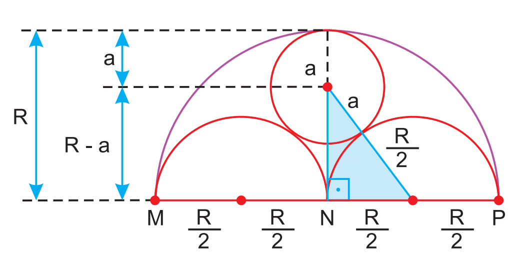


Utilizando a relação (HIP) . (ALT) = (CAT) . (CAT), temos:

$15 \,.\, h = 9 \,.\, 12 \Leftrightarrow h = \dfrac{36}{5} = 7,2$

Resposta: B

7)



Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo sombreado, tem-se:

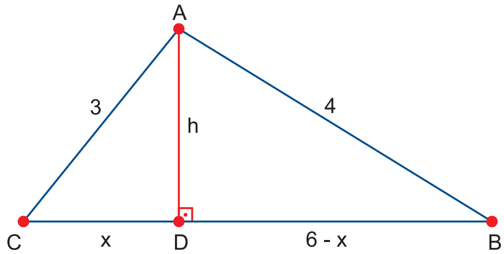
$\left(a + \dfrac{R}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + (R - a)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + aR + \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{R^2}{4} + R^2 - 2aR + a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow aR = R^2 - 2aR \Leftrightarrow 3aR = R^2 \Leftrightarrow 3a = R \Leftrightarrow a = \dfrac{R}{3}$

Resposta: D

8)



Se h é altura do triângulo ACB relativa ao lado CB, e se x é a medida de CD, então:

I) No triângulo ADC, tem-se

$h^2 + x^2 = 3^2 \Leftrightarrow h^2 = 9 - x^2$

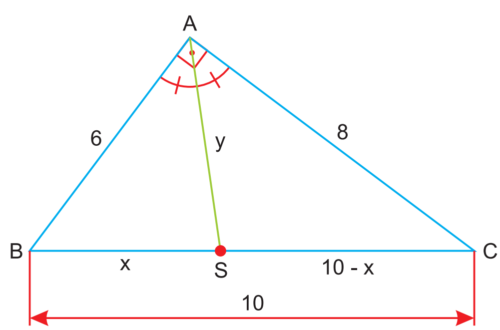
II) No triângulo ADB, tem-se

$h^2 + (6 - x)^2 = 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 12x - 20 - x^2$

Logo, $12x - 20 - x^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{29}{12}$

Resposta: E

9)



I) Pelo teorema da bissetriz interna no ΔABC temos:

$\dfrac{6}{x} = \dfrac{8}{10 - x} \Leftrightarrow 8x = 60 - 6x \Leftrightarrow 14x = 60 \Leftrightarrow x = \dfrac{30}{7}$

II) Sendo y, em centímetros, a medida da bissetriz AS, pela lei dos cossenos no triângulo ABS, temos:

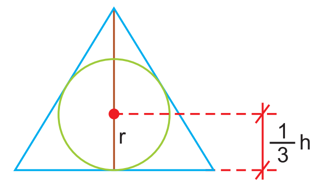
$y^2 = 6^2 + \left(\dfrac{30}{7}\right)^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, \dfrac{30}{7} \,.\, \cos \hat{B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = 36 + \dfrac{900}{49} - 2 \,.\, 6 \,.\, \dfrac{30}{7} \,.\, \dfrac{6}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = 36 + \dfrac{900}{49} - \dfrac{216}{7} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1152}{49} \Rightarrow y = \dfrac{24\sqrt{2}}{7}$

Resposta: D

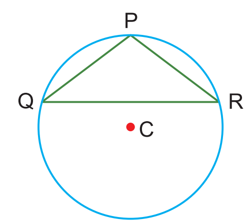
10)



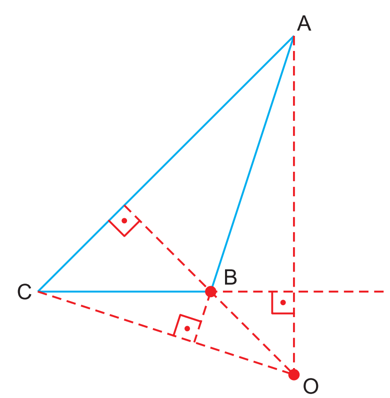
$r = \dfrac{1}{3} h = \dfrac{1}{3} \,.\, \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6}$

Resposta: E

11) O circuncentro de um triângulo obtusângulo é um ponto da região exterior do triângulo.

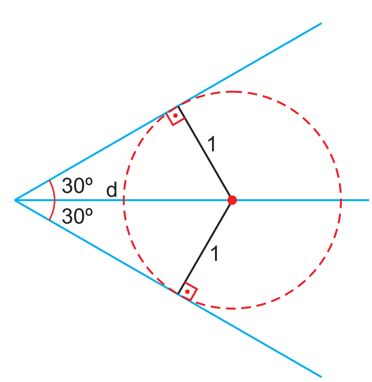


O ortocentro do triângulo obtusângulo é um ponto da região exterior do triângulo.



Resposta: D

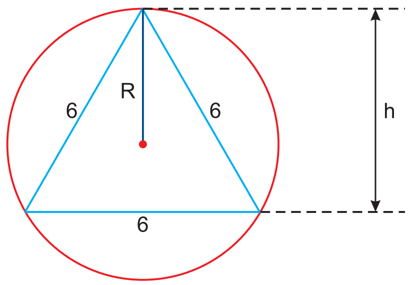
12)



$\text{sen } 30° = \dfrac{1}{d} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{d} \Leftrightarrow d = 2$

Resposta: D

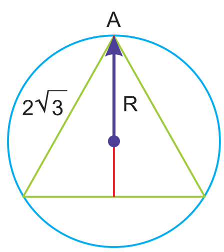
13)



$R = \frac{2}{3}\ h = \frac{2}{3}\ .\ \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Resposta: B

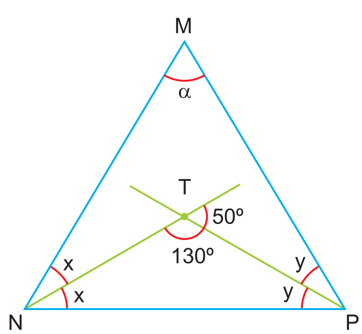
14)



$R = \frac{2}{3}\ h = \frac{2}{3}\ .\ \frac{2\sqrt{3}\ .\ \sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 2$

Resposta: B

15)



Se $\overrightarrow{NT}$ é a bissetriz de $M\hat{N}P$ e $\overrightarrow{PT}$ é a bissetriz de $M\hat{P}N$, então:

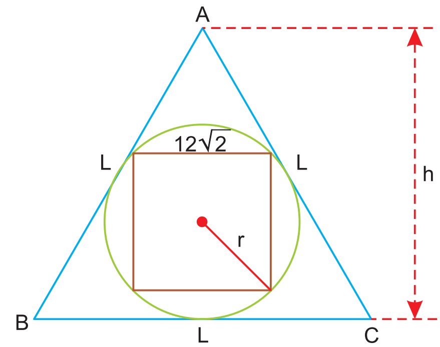
I) $x + y + 130° = 180° \Leftrightarrow x + y = 50°$

II) $\alpha + 2x + 2y = 180° \Leftrightarrow \alpha + 2(x + y) = 180° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha + 2\ .\ 50 = 180° \Leftrightarrow \alpha = 80°$

Resposta: E

16)



Sendo r o raio do círculo e L o lado do triângulo equilátero de altura h, todos medidos em metros, temos:

I) $2r = 12\sqrt{2}\ .\ \sqrt{2} \Leftrightarrow r = 12$

II) $r = \frac{1}{3}\ .\ h \Rightarrow r = \frac{1}{3}\ .\ \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = \frac{1}{3}\ .\ \frac{L\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow L = 24\sqrt{3}$

Resposta: D